MIDIENDO SINGULARIDADES CON FROBENIUS

JAVIER CARVAJAL ROJAS

RESUMEN. Estos son apuntes para la Cuarta Escuela Temática en Álgebra y Geometría Algebraica. Dicha Escuela se llevó a cabo en el CIMAT del 11 al 15 de diciembre 2023.

ÍNDICE

1. Introducción 1
1.1. Organización de las notas 2
2. ¿Qué es una singularidad? 2
2.1. Espacios algebraicos 2
2.2. Afín versus proyectivo 3
2.3. Variedades y dimensión 5
2.4. Singularidades 6
2.5. El enfoque algebraico abstracto y anillos regulares 10
3. El endomorfismo de Frobenius y el teorema de Kunz 12
4. F-signatura y multiplicidad de Hilbert–Kunz 13
4.1. Sobre varias nociones de rango 14
4.2. El rango genérico de F^e_*R 16
4.3. La multiplicidad de Hilbert–Kunz 16
4.4. La F-signatura y F-regularidad 19
4.5. Prueba de la convergencia 24
5. Umbrales de F-pureza y F-umbrales 25
6. Aplicación a grupos fundamentales locales 27
Referencias 31

1. INTRODUCCIÓN

La geometría algebraica es una geometría en la cual las singularidades juegan un papel estelar. No solo tienen las variedades algebraicas singularidades sino que definir una variedad algebraica proyectiva conlleva definir una singularidad. Piense en el origen del cono definido por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. Dicha singularidad codifica todas las formas en que la recta proyectiva se encaja en el plano proyectivo como una cuádrica.

En particular, en geometría algebraica y álgebra conmutativa nos interesa poder decir qué tan severa es una singularidad y cómo esta afecta la geometría de la variedad ambiente. Sin embargo, esto es particularmente retador sobre cuerpos de característica positiva. Afortunadamente, el morfismo de Frobenius nos provee con métodos muy poderosos para estudiar y medir singularidades.

En este mini-curso, haremos una breve introducción a estos temas con un énfasis en la teoría de F-singularidades y sus cuatro grandes invariantes numéricos: F-signaturas, multiplicidades de Hilbert–Kunz, umbrales de F-pureza y F-umbrales.

Veremos que el F-umbral es al umbral de F-pureza lo que la multiplicidad de Hilbert–Kunz es la F-signatura. En cierta forma, la F-signatura es un invariante más refinado que se puede estudiar por medio de multiplicidades de Hilbert–Kunz y análogamente con los umbrales. La F-signatura mide *multiplicidades* de F-escición mientras que el umbral de F-pureza mide *grados* de F-escición. Por razones de espacio, nos enfocaremos un poco más en las multiplicidades más que en los umbrales.

Aún si estos son temas de investigación actual, vamos a presentar las ideas básicas de la manera más elemental posible. No obstante, un conocimiento básico del lenguaje de módulos y anillos es deseado. Digamos, los primeros tres capítulos del libro de álgebra conmutativa de Atiyah y MacDonald [AM69].

1.1. Organización de las notas. Antes de entrar en materia con los invariantes como tal, nos daremos a la tarea de ahondar en la Sección 2 en cómo las singularidades surgen en geometría algebraica y porqué son importantes.

Una vez teniendo claro qué es una singularidad, veremos en la Sección 3 cómo se reinterpretan sobre cuerpos de característica positiva gracias al morfismo de Frobenius y el magnífico teorema de Kunz.

En la Sección 4, estudiaremos en detalle las multiplicidades de F-escición: F-signatura y multiplicidad de Hilbert–Kunz. En la Sección 5 pero en menor detalle, exploraremos los grados de F-escición umbrales de F-pureza y F-umbrales.

Para finalizar, veremos en la Sección 6 una aplicación a los grupos fundamentales de singularidades.

A lo largo de las notas, quien lee podrá encontrar múltiples ejercicios. Se recomienda al menos leer todos ellos. Aquellos ejercicios con un asterisco se consideran mucho más difíciles y quien lee puede omitir resolverlos.

Desde luego, hay ya varios *surveys* sobre estos temas disponibles en la literatura, aunque todos los que conozco están en inglés. Yo recomiendo consultar los siguientes [ST12, SZ15, BFS13, TW18, Hoc13, Hun13]. Otras notas que me parecen fantásticas son las de Ma y Polstra [MP]. Sin embargo, estas requieren un conocimiento mucho más avanzado de álgebra conmutativa.

2. ¿Qué es una singularidad?

Vamos a empezar definiendo qué es una singularidad y cómo surgen en geometría algebraica. Para esto, vamos a fijar un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado. La mayor parte de esta sección se puede estudiar en mucho mayor detalle en [Har77, I].

2.1. Espacios algebraicos. En geometría algebraica nos interesa estudiar (sistemas de) ecuaciones polynomiales sobre $\Bbbk$. Por ejemplo, podemos tomar m polinomios en n variables con coeficientes en $\Bbbk$

$$f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)\in \Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$$

para luego considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

Nos interesa estudiar el espacio solución X asociado a tal sistema de ecuaciones (tcc *conjunto algebraico* [Har77, I, §1]).

Tal espacio X se puede definir encajado en el espacio afín

$$\mathbb{A}^n := \Bbbk^n = \Bbbk \times \cdots \times \Bbbk = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1,\dots,a_n \in \Bbbk\}$$

de dimensión n. Podríamos escribir

$$X = Z_{\mathbb{A}^n}(f_1,\dots,f_m) := \{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n \mid f_i(a_1,\dots,a_n)=0,\, \forall i=1,\dots,m\} \subset \mathbb{A}^n.$$

En tal caso, $X = Z_{\mathbb{A}^n}(f_1,\dots,f_m)$ se piensa como un *espacio algebraico afín.*

Sin embargo, *si cada f_i es homogéneo*, X se puede definir dentro del espacio proyectivo

$$\mathbb{P}^{n-1} := {(\mathbb{A}^n \setminus (0,\dots,0))}/{\sim} = \{[a_1:\cdots:a_n] \mid a_1,\dots,a_n\in\Bbbk \text{ no todos cero}\}$$

de dimensión $n-1$. Aquí, la relación de equivalencia sobre $\mathbb{A}^n\setminus(0,\dots,0)$ es dada por: $(a_1,\dots,a_n)\sim(b_1,\dots,b_n)$ sii existe $0\neq\lambda\in\Bbbk$ tal que $(a_1,\dots,a_n)=\lambda(b_1,\dots,b_n)$. La clase de equivalencia de $(a_1,\dots,a_n)$ se denota por $[a_1:\cdots:a_n]$. Piénsese en $\mathbb{P}^{n-1}$ como el espacio de rectas de $\mathbb{A}^n$ que pasan por el origen.

Ejercicio 2.1. Sea $f(x,\dots,x_n)\in\Bbbk[x_1,\dots x_n]$ un polinomio homogéneo de grado d. Pruebe que para todo $\lambda\in\Bbbk$ y $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n$ se tiene que $f(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)=\lambda^d f(a_1,\dots,a_n)$. Use esto para justificar que la condición $f([a_1:\cdots:a_n])=0$ está bien definida.

Así, usando el Ejercicio 2.1, podemos definir X como

$$Z_{\mathbb{P}^{n-1}}(f_1,\dots,f_m) := \{[a_1:\cdots:a_n]\in\mathbb{P}^{n-1} \mid f_i([a_1:\cdots:a_n])=0,\,\forall i=1,\dots,m\}\subset\mathbb{P}^{n-1}$$

si cada f_i es homogéneo. En tal caso, se piensa en $X=Z_{\mathbb{P}^{n-1}}(f_1,\dots,f_m)$ como en un *espacio algebraico proyectivo.*

Ejercicio 2.2 (El grupo multiplicativo $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$)**.** Pruebe que $\Bbbk^\times=\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ se puede pensar como un espacio algebraico afín al mostrar que

$$\Bbbk^\times \longrightarrow Z_{\mathbb{A}^2}(xy-1),\quad t\mapsto(t,t^{-1}),$$

es una biyección. Tal espacio algebraico se conoce como *grupo multiplicativo* y se denota por $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.[1]

2.2. Afín versus proyectivo. Quien lee se podría estar preguntando cuál es la diferencia entre los espacios algebraicos afines y proyectivos. ¿Por qué molestarse con los espacios proyectivos si se ven tan complicados? La razón principal es que los espacios afines no son "lo suficientemente compactos".[2] En la práctica, esto significa que no hay suficientes "puntos límite" para expresar los teoremas básicos. Por ejemplo, en el plano afín $\mathbb{A}^2$, dos rectas $Z_{\mathbb{A}^2}(a_1+b_1x+c_1y)$ y $Z_{\mathbb{A}^2}(a_2+b_2x+c_2y)$ no necesariamente se intersecan. Es decir, en $\mathbb{A}^2$ hay rectas parelelas. La situación es muy distinta en $\mathbb{P}^2$:

[1]Quien esté familiarizado con la topología de Zariski puede también mostrar que tal biyección es un homeomorfismo en esta topología.

[2]Estamos siendo imprecisos porque no hemos definido ninguna topología.

Ejercicio 2.3. Pruebe que dos rectas distintas $Z_{\mathbb{P}^2}(a_1z+b_1x+c_1y)$ y $Z_{\mathbb{P}^2}(a_2z+b_2x+c_2y)$ en $\mathbb{P}^2$ se intersecan en exactamente un punto.

Lo anterior es un caso particular del teorema de Bézout. Dicho teorema establece que si $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ son polinomios homogéneos irreducibles de grado m y n respectivamente, entonces $Z_{\mathbb{P}^2}(f)$ y $Z_{\mathbb{P}^2}(g)$ se intersecan en exactamente mn puntos contados con multiplicidad. En parte, esto hace que los espacios algebraicos proyectivos sean el objeto básico de estudio en geometría algebraica.

La buena noticia es que los espacios afines se pueden compactificar a espacios proyectivos. Esto se hace al *homogenizar* cada polinomio que define el espacio algebraico afín. En concreto, si

$$f=\sum_{i_0,\dots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\in \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$$

es un polinomio de grado d, entonces su *homogenización* es el polinomio homogéneo de grado d:

$$f^{\mathrm{h}}\coloneqq \sum_{i_0,\dots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\dots,i_n}x_0^{d-i_1-\dots-i_n}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\in \Bbbk[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

Ejercicio 2.4. Calcule la homogenización de $x^4y^5z-5x^3yz+7xz+2$.

Así, si $X=V_{\mathbb{A}^n}(f_1,\dots,f_m)$ con $f_1,\dots,f_m\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ entonces su *compactificación proyectiva* es

$$\bar{X}\coloneqq Z_{\mathbb{P}^n}(f_1^{\mathrm{h}},\dots,f_m^{\mathrm{h}})\subset\mathbb{P}^n$$

donde $f_1^{\mathrm{h}},\dots,f_m^{\mathrm{h}}\in\Bbbk[x_0,x_1,\dots,x_n]$. Con un poco de perspicacia, quien lee habrá notado que no es claro que $\bar{X}$ contiene una copia de X. Esto se arregla al definir el encaje

$$X\hookrightarrow\bar{X},\quad (a_1,\dots,a_n)\mapsto[1:a_1:\dots:a_n].$$

Ejercicio 2.5. Pruebe que el encaje anterior está bien definido.

Por abuso de notación, denotaremos la imagen o copia de X en $\bar{X}$ por X.

Ejercicio 2.6. Pruebe que la compactificación de una recta L en $\mathbb{A}^2$ agrega exactamente un punto. Es decir $\bar{L}=L\cup\{P\}$ donde $P\in\mathbb{P}^2$ es un punto. Pruebe que P es el mismo para toda recta en $\mathbb{A}^2$ paralela a L.

Por otro lado, los espacios algebraicos proyectivos se pueden entender por medio de espacios algebraicos afines. Hay al menos dos formas de hacer esto. La primera se obtiene al notar que $\mathbb{P}^n$ está cubierto por $n+1$ copias de $\mathbb{A}^n$.[3] En efecto, note que para cada $i=0,1,\dots,n$ tenemos que

$$U_i\coloneqq\{[a_0:a_1:\dots:a_{i-1}:1:a_{i+1}:\dots:a_n]\in\mathbb{P}^n\}$$

es una copia de $\mathbb{A}^n$ encajada en $\mathbb{P}^n$. Por ejemplo, U_0 es la copia que se obtiene al compactificar $\mathbb{A}^n$ según lo explicado anteriormente. Observe que

$$\mathbb{P}^n=U_0\cup U_1\cup\ldots\cup U_n.$$

En particular, podemos usar esto para escribir un cubrimiento de cualquier espacio algebraico proyectivo. En efecto, si $f_1,\dots,f_m\in\Bbbk[x_0,x_1,\dots,x_n]$ son homogéneos entonces

$$Z_{\mathbb{P}^n}(f_1,\dots,f_m)=\bigcup_{i=0}^{n} Z_{\mathbb{P}^n}(f_1,\dots,f_m)\cap U_i.$$

[3]Lo cual es un cubrimiento por abiertos en una topología adecuada.

Ejercicio 2.7. Pruebe que $Z_{\mathbb{P}^n}(f_1,\dots,f_m)\cap U_i$ corresponde a un espacio algebraico afín en $U_i\cong\mathbb{A}^n$. Pruebe que $\bar{X}\cap U_0=X$ para todo espacio algebraico afín X.

La segunda forma en la que los espacios algebraicos proyectivos se pueden estudiar por medio de espacios algebraicos afines es por medio de *conos*. Concretamente, sean $f_1,\dots,f_m\in\Bbbk[x_0,x_1,\dots,x_n]$ polinomios homogéneos y considere:

$$X\coloneqq Z_{\mathbb{P}^n}(f_1,\dots,f_n) \text{ y } Y\coloneqq Z_{\mathbb{A}^{n+1}}(f_1,\dots,f_n).$$

Note que $o\coloneqq(0,0,\dots,0)\in Y$. Sea $\bar{Y}\subset\mathbb{P}^{n+1}$ la clausura proyectiva de Y.

Ejercicio 2.8. Pruebe que la aplicación $\pi\colon Y\setminus\{o\}\longrightarrow X$ dada por

$$\pi\colon(a_0,a_1,\cdots,a_n)\mapsto[a_0:a_1:\cdots:a_n]$$

está bien definida y sus fibras son copias de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. De hecho, en términos más técnicos, π presenta a $Y\setminus\{o\}$ como un $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-fibrado sobre X.

Ejercicio 2.9. Muestre que $\pi\colon Y\setminus\{o\}\longrightarrow X$ se extiende a una aplicación $\varpi\colon\bar{Y}\setminus\{o\}\longrightarrow X$ cuyas fibras son copias de $\mathbb{A}^1$. En términos más técnicos, ϖ presenta a $\bar{Y}\setminus\{o\}$ como un fibrado lineal sobre X.

Ejercicio* 2.10. Para quienes sepan de explosiones, sea $\varepsilon\colon Z\longrightarrow\bar{Y}$ la explosión de $\bar{Y}$ en o. Muestre que hay una aplicación $Z\longrightarrow X$ cuyas fibras son copias de $\mathbb{P}^1$ y tal que su restricción a $Z\setminus\varepsilon^{-1}(o)$ coincide con ϖ.

2.3. Variedades y dimensión. Lo primero es considerar el gran teorema de los ceros de Hilbert. Ver [Har77, I, Corollary 1.4, Exercise 2.1] y las referencias ahí citadas.

Teorema 2.1 (Teorema de ceros de Hilbert)**.** *Sean $f_1,\dots,f_m,g_1,\dots,g_l\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ polinomios y $\mathfrak{a}\coloneqq(f_1,\dots,f_m),\mathfrak{b}\coloneqq(g_1,\dots,g_l)\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ los ideales correspondientes. Entonces, $\{f_1,\dots,f_m\}$ y $\{g_1,\dots,g_l\}$ definen el mismo espacio algebraico (ya sea afín o proyectivo) si y solo si $\sqrt{\mathfrak{a}}=\sqrt{\mathfrak{b}}$. Más aún, la siguiente función es una biyección que revierte inclusiones:*

$$\{\mathfrak{a}\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]\mid\mathfrak{a}\text{ es un ideal radical}\}\longrightarrow\{Z\subset\mathbb{A}^n\mid Z\text{ es un espacio algebraico}\}$$
$$\mathfrak{a}\mapsto Z_{\mathbb{A}^n}(\mathfrak{a})\coloneqq\{a\in\mathbb{A}^n\mid f(a)=0\,\forall f\in\mathfrak{a}\}$$

Similarmente, la aplicación

$$\mathfrak{a}\mapsto Z_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathfrak{a})\coloneqq\{a\in\mathbb{P}^{n-1}\mid f(a)=0\,\forall f\in\mathfrak{a}\text{ homogéneo}\}$$

define una biyección que revierte inclusiones entre el conjunto

$$\{\mathfrak{a}\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]\mid\mathfrak{a}\text{ es un ideal homogéneo radical diferente de }(x_1,\dots,x_n)\}$$

y el conjunto

$$\{Z\subset\mathbb{P}^{n-1}\mid Z\text{ es un espacio algebraico}\}.$$

Definición 2.2 (Variedades)**.** Un espacio algebraico afín (resp. proyectivo) se dice ser una *variedad afín* (resp. proyectiva) si corresponde a un ideal primo de acuerdo a la correspondencia del Teorema 2.1.

Observación 2.3. La idea es que una variedad es un espacio algebraico *irreducible*, o sea que no se puede expresar como la unión de dos (sub-)espacios algebraicos no vacíos.

Observación 2.4. En las correspondencias del Teorema 2.1, ideales maximales corresponden a puntos.

Observación 2.5. Recuerde que un anillo es noetheriano si todos sus ideales son finitamente generados. Por el teorema de la base de Hilbert, anillos de polinomios sobre cuerpos son noetherianos y en particular lo son todos sus cocientes, localizaciones, y completaciones. Ver [AM69, Ch. 7].

Definición 2.6 (Anillo de coordenadas)**.** Sea X un espacio algebraico que corresponde a un ideal radical $\mathfrak{a} \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Se define el *anillo de coordenadas* de X como la $\Bbbk$-álgebra (reducida) $\Bbbk[X] \coloneqq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$.

Observación 2.7. Recuerde que $\Bbbk[X]$ es una anillo noetheriano. Note que X es una variedad sii $\Bbbk[X]$ es un dominio entero. Similarmente, X es un punto sii $\Bbbk[X] = \Bbbk$.

Ejercicio 2.11. Pruebe que los puntos de X corresponden a los ideales maximales de $\Bbbk[X]$.

Definición 2.8 (Dimensión de Krull y altura)**.** Sea R un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ un ideal primo. Se define la *altura* de $\mathfrak{p}$ como

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p} \coloneqq \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \mid \text{hay una cadena de ideales primos } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}$$

Se define la *dimensión* de R como

$$\dim R \coloneqq \text{máx}\{\operatorname{alt} \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}.$$

Ejercicio 2.12. Pruebe que $\dim \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \geq n$.

Definición 2.9 (Dimensión de un espacio algebraico)**.** Sea X un espacio algebraico afín (resp. proyectivo). La dimensión de X se define como $\dim X \coloneqq \dim \Bbbk[X]$ (resp. $\dim X \coloneqq \Bbbk[X] - 1$).

Teorema 2.10 (Teorema de la dimensión [AM69, Theorem 11.25])**.** *Si X es una variedad afín entonces* $\dim X$ *es el grado de trascendencia de $\Bbbk(X)/\Bbbk$, donde $\Bbbk(X)$ es el cuerpo de fracciones de $\Bbbk[X]$, el cual se denomina como* cuerpo de funciones (racionales) de X.

Ejercicio 2.13. Pruebe que $\dim \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \leq n$. Concluya que $\dim \mathbb{A}^n = n$ y $\dim \mathbb{P}^n = n$.

Observación 2.11. Si X es una variedad proyectiva, su cuerpo de funciones $\Bbbk(X)$ se define como el sub-cuerpo del cuerpo de fracciones de $\Bbbk[X]$ dado por fracciones f/g donde f y g son polinomios homogéneos del mismo grado. En tal caso, la dimension de X es el grado de trascendencia de $\Bbbk(X)/\Bbbk$.

Observación 2.12. Resulta que si una variedad afín es definida por un ideal primo $\mathfrak{p} \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $\operatorname{alt} \mathfrak{p} = n - \dim X$. Por lo cual, a la altura de $\mathfrak{p}$ se le conoce también como la *codimensión* de X en $\mathbb{A}^n$. Sin embargo, a diferencia de la dimensión, la codimensión no es intrínseco de X sino más bien de su encaje en $\mathbb{A}^n$.

2.4. Singularidades. Vamos a empezar con una definición extrínseca pero intuitiva de singularidad, la cual depende *a priori* de las ecuaciones que describen la variedad. Luego daremos una versión intrínseca la cual seguiremos usando por el resto del curso. La razón de proseguir en este orden es que queremos motivar la definición de singularidad como la falta de suavidad según el análisis clásico.

Teorema 2.13. *Sea X una variedad afín definida por un ideal primo $\mathfrak{p} = (f_1, \ldots, f_n) \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y sea $a \in X$ un punto. Considere la* matrix jacobiana

$$J_a(f_1, \ldots, f_m) \coloneqq [(\partial f_i/\partial x_j)(a)]_{m \times n}$$

y denote su rango como $j_a(f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{N}$. Entonces, $j_a(f_1, \ldots, f_m)$ es a lo más $\operatorname{alt} \mathfrak{p} = n - \dim X$*—la codimensión de $X \subset \mathbb{A}^n$.*

Definición 2.14. Sea X una variedad afín definida por un ideal primo $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_n) \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ y sea $a \in X$ un punto. Decimos que $a \in X$ es una *singularidad* o un *punto singular* de X si $j_a(f_1, \dots, f_m) < n - \dim X$. De lo contrario, si $j_a(f_1, \dots, f_m) = n - \dim X$, decimos que $a \in X$ es un punto *regular* o bien *suave/liso*.

Observación 2.15. La motivación de esta definición es la siguiente. Supongamos que $\Bbbk = \mathbb{C}$ (o bien $\mathbb{R}$). Entonces, si $a \in X$ es un punto regular, el teorema de la función inversa establece que existe un vencindario de $a \in X$ en donde X se ve como $\mathbb{A}^{n-\dim X}$. En particular, si todos los puntos de X son regulares entonces X es una variedad diferenciable suave. Esto es lo que queremos hacer de manera algebraica. La desventaja de está definición es que no es claro si es independiente de las ecuaciones que se usen para describir X. Antes de ver que este es el caso, calculamos algunos ejemplos.

Ejercicio 2.14. Calcule los puntos singulares de las siguientes variedades algebraicas asumiendo que $2 \neq 0 \in \Bbbk$ y $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

1. $Z_{\mathbb{A}^2}(x^2 = x^n + y^n)$
2. $Z_{\mathbb{A}^2}(xy = x^n + y^n)$
3. $Z_{\mathbb{A}^2}(x^3 = y^2 + x^n + y^n)$
4. $Z_{\mathbb{A}^2}(x^2y + xy^2 = x^n + y^n)$
5. $Z_{\mathbb{A}^3}(xy^2 = z^2)$
6. $Z_{\mathbb{A}^3}(x^n + y^n = z^n)$
7. $Z_{\mathbb{A}^3}(xy + x^n + y^n)$

Definición 2.16 (Germen de un punto de un espacio algebraico)**.** Sean X un espacio algebraico afín y $a \in X$ un punto que corresponde a un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$. Definimos el *germen* de X en a como el anillo local

$$\mathscr{O}_{X,a} := \Bbbk[X]_{\mathfrak{m}}$$

que se obtiene al localizar $\Bbbk[X]$ en $\mathfrak{m}$. Denotaremos el ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,a}$ como $\mathfrak{m}_a$

Observación 2.17. Resulta que el cuerpo residual $\mathscr{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a$ de $\mathscr{O}_{X,a}$ es $\Bbbk$ (lo cual usa que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado). Si X es una variedad entonces $\mathscr{O}_{X,a}$ es un dominio entero con cuerpo de fracciones $\Bbbk(X)$. De hecho, en tal caso, se puede pensar en $\Bbbk[X]_{\mathfrak{m}}$ como el subanillo de $\Bbbk(X)$ dado por las fracciones f/g tales que $g \notin \mathfrak{m}$.

Definición 2.18 (Espacio cotangente en un punto)**.** Sean X un espacio algebraico afín y $a \in X$ un punto. El *espacio cotangente* de X en a se define como el $\Bbbk$-modulo $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$, el cual es de dimensión finita y su dimensión se conoce como la *dimensión de encaje* de $\mathscr{O}_{X,a}$.

Ejercicio 2.15. Use el lema de Nakayama para probar que la dimension de encaje de $\mathscr{O}_{X,a}$ es el número mínimo de generadores de $\mathfrak{m}_a$.

Teorema 2.19 ([AM69, Corollary 11.15])**.** *Sean X un espacio algebraico afín y $a \in X$ un punto. La dimensión de encaje de $\mathscr{O}_{X,a}$ es al menos* $\dim R$.

Teorema 2.20 (*cf.* [Har77, I, Theorem 5.1])**.** *Sean $X = Z_{\mathbb{A}^n}(f_1, \dots, f_m)$ una variedad afín y $a \in X$ un punto. Entonces,*

$$n = \dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 + j_a(f_1, \dots, f_m).$$

En particular:

1. *el rango de la matriz jacobiana es independiente de las ecuaciones que describen a X, y*

2. $a \in X$ es un punto singular sii la dimensión de encaje de $\mathscr{O}_{X,a}$ es diferente y así estrictamente mayor a $\dim R$.

Ejercicio 2.16 (Singularidades cónicas)**.** Volvamos al Ejercicio 2.8 y suponga que X y entonces Y son variedades. Pruebe que $o \in Y$ es un punto singular sii al menos uno de los polinomios homogéneos f_i no es lineal. Se dice que $o \in Y$ es la singularidad cónica sobre la variedad proyectiva X.

2.4.1. El caso general. De momento, solo hemos definido la noción de punto singular sobre una variedad afín. Sin embargo, por la anterior, esto se puede generalizar a todos los espacios algebraicos siempre y cuando se cuente con una noción de gérmen. Hemos visto ya cómo definir el germen en un punto de un espacio algebraico afín en Definición 2.16. En el caso proyectivo, la clave es notar que $\Bbbk[X]$ es una $\Bbbk$-álgebra *graduada* si X es un espacio algebraico proyectivo.

En efecto, note que la $\Bbbk$-álgebra de polinomios admite una descomposición como $\Bbbk$-módulo

$$S \coloneqq \Bbbk[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S_j$$

en dónde S_j es el $\Bbbk$-submodulo de polinomios homogéneos de grado j (tcc *formas* de grado j). Observe también que la estructura de anillo de S es dada por transformaciones lineales $S_j \otimes_{\Bbbk} S_k \longrightarrow S_{j+k}$. En pocas palabras, S es una *$\Bbbk$-álgebra positivamente graduada.* Ahora bien, decir que $\mathfrak{a} \subset S$ es un ideal homogéneo es decir que la inclusión

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathfrak{a} \cap S_j \subset \mathfrak{a}$$

es una igualdad. En particular, si $\mathfrak{a}$ es homogéneo entonces el cociente

$$S/\mathfrak{a} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S_j/\mathfrak{a} \cap S_j$$

es una $\Bbbk$-álgebra graduada también al decir $(S/\mathfrak{a})_j \coloneqq S_j/\mathfrak{a} \cap S_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tales anillos graduados se conocen como *$\Bbbk$-álgebras graduadas estándar*. El punto clave es que $\Bbbk$ es el sumando de grado cero y es generada por un número finito de elementos de grado 1. Así, $\Bbbk[X] = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \Bbbk[X]_j$ es una $\Bbbk$-álgebra graduada (reducida) si X es un espacio algebraico proyectivo.

Sea $R = S/\mathfrak{a}$ una $\Bbbk$-álgebra graduada estándar y $W \subset R$ un conjunto multiplicativo de elementos homogéneos. En tal caso, la localización $W^{-1}R$ admite una graduadación al definir el $\Bbbk$-módulo

$$(W^{-1}R)_j \coloneqq \{f/g \mid g \in W \cap R_k \text{ y } f \in R_{k+j}\} \subset W^{-1}R.$$

Sin embargo, $(W^{-1}R)_0$ no es un cuerpo y mucho menos igual a $\Bbbk$. De hecho, si $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo homogéneo; digamos distinto al *ideal maximal irrelevante* $R_+ \coloneqq \bigoplus_{j>0} R_j$, y W es el conjunto de elementos homogéneos en R que no están en $\mathfrak{p}$, entonces

$$R_{(\mathfrak{p})} \coloneqq (W^{-1}R)_0 = \{f/g \mid f \in R_k, g \in R_k \setminus \mathfrak{p}\} \subset R_{\mathfrak{p}}$$

es un anillo local con ideal maximal

$$(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \cap R_{(\mathfrak{p})} = \{f/g \mid f \in \mathfrak{p} \cap R_k, g \in R_k \setminus \mathfrak{p}\} \subset R_{\mathfrak{p}}.$$

Ejercicio 2.17. Describa el cuerpo residual de este anillo local.

Por ejemplo, el cuerpo de funciones $\Bbbk(X)$ de una variedad proyectiva X se definió como $\Bbbk[X]_{((0))}$.

Definición 2.21. Sean X un espacio algebraico proyectivo y $a \in X$ un punto que corresponde al ideal maximal homogéneo $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$. Definimos el *germen* de X en a como el anillo local

$$\mathscr{O}_{X,a} \coloneqq \Bbbk[X]_{(\mathfrak{m})}.$$

Denotaremos el ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,a}$ como $\mathfrak{m}_a$

Ejercicio 2.18. Sea X un espacio algebraico proyectivo y suponga que $a \in X$ pertenece a una de las cartas afines estándar $U_i \cap X$. Pruebe que $\mathscr{O}_{X,a} \cong \mathscr{O}_{X\cap U_i,a}$.

Ya que hemos logrado definir el germen de un espacio algebraico en un punto, podemos definir la noción de singularidad de la siguiente manera. Primero, es importante observar que el cuerpo residual de $\mathscr{O}_{X,a}$ es $\Bbbk$ y que entonces $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ es un $\Bbbk$-módulo de dimensión finita.

Definición 2.22. Sea $a \in X$ un punto en un espacio algebraico. Decimos que $a \in X$ es una *singularidad* o bien *punto singular* si

$$\dim_{\Bbbk} \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 = \dim \mathscr{O}_{X,a}.$$

Teorema 2.23 (Criterio del jacobiano proyectivo)**.** *Sea X una variedad proyectiva definida por un ideal primo homogéneo $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_n) \subset \Bbbk[x_0, \dots, x_n]$ y sea $a = [a_0 : \cdots : a_n] \in X$ un punto. Entonces,*

$$j_{(a_0,\dots,a_n)}(f_1, \dots, f_m) = j_{(\lambda a_0,\dots,\lambda a_n)}(f_1, \dots, f_m)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. En particular, $j_a(f_1, \dots, f_m)$ está bien definido. Más aún, $a \in X$ es una singularidad sii $j_a(f_1, \dots, f_m) < n - \dim X$.

Ejercicio 2.19. Pruebe Teorema 2.23 de la siguiente forma.

1. Primero, pruebe que en efecto $j_a(f_1, \dots, f_m)$ está bien definido. Note que, usando la notación del Ejercicio 2.8, esto significa probar que la función $x \mapsto j_x(f_1, \dots, f_m)$ es constante sobre las fibras de $\pi\colon Y \setminus \{o\} \longrightarrow X$. De esta manera, $j_a(f_1, \dots, f_m)$ es el valor de $x \mapsto j_x(f_1, \dots, f_m)$ sobre la fibra de π en a.
2. Pruebe el lema de Euler: si $f \in \Bbbk[x_0, \dots, x_n]$ es una forma de grado k entonces
$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$
3. Use Ejercicio 2.18 para reducir la regularidad de a al caso afín y aplique el criterio del jacobiano afín. Es decir, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a = [1 : a_1 : \cdots : a_n]$, y entonces $a \in X$ es singular sii
$$j_{(a_1,\dots,a_n)}\big(f_1(1, x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(1, x_1 \dots, x_n)\big) < n - \dim X.$$
4. Finalmente, use el lema de Euler para ver que
$$j_a(f_1, \dots, f_m) = j_{(a_1,\dots,a_n)}\big(f_1(1, x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(1, x_1 \dots, x_n)\big).$$

2.4.2. ¿Por qué estudiar singularidades? La primera razón es que las variedades algebraicas son naturalmente singulares. Aún si se está interesado exclusivamente en variedades sin singularidades, toda "operación" en geometría algebraica es propensa a introducir singularidades. Por ejemplo, cuando un grupo actúa sobre una variedad, el cociente es casi siempre; de manera fundamental, singular. Así, aún si se empieza a jugar sin singularidades, el juego algebro-geométrico rápidamente las introduce de vuelta. Este punto de vista le permitió a Mori ganar la medalla fields en el contexto del *programa del modelo minimal (PMM)*. A grandes rasgos, el gran descubrimiento de Mori fue darse cuenta que, para que algoritmo del PMM funcione, se tiene que tomar en cuenta las singularidades en todas partes. Esto rápidamente lleva a la introducción de las singularidades *(log-)canónicas*, *(log-)terminales*, etc. Estas son consideradas por muchos el tipo de singularidad más importante en geometría algebraica.

Bueno, digamos que ya estamos convencidos de que hay que estudiar todas las variedades, ya sean singulares o no. ¿Realmente pueden las singularidades afectar la geometría global de una variedad? La respuesta es que sí y mucho. Por ejemplo, el análogo a la dualidad de Poincaré en geometría algebraica se llama *dualidad de Serre* y esta es muy sensible a las singularidades de la variedad. Casi por definición, las singularidades de *Cohen–Macaulay* son aquellas singularidades que permiten que la dualidad de Serre sea cierta. Esto las hace una de las singularidades más importantes y estudiadas en matemáticas. El álgebra conmutativa moderna en gran medida estudia estas singularidades así como su refinamiento conocido como singularidades de *Gorenstein*.

Una tercera razón para estudiar singularidades es que estas determinan y se pueden usar para entender variedades projectivas. Por ejemplo, si X es una variedad proyectiva, podemos considerar el cono afín Y sobre X con vértice $o \in Y$; recuerde el Ejercicio 2.8 y el Ejercicio 2.16. Dado que se tiene un $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-fibrado $\pi\colon Y \setminus \{o\} \longrightarrow X$, gran parte de la geometría de X es determinada por la singularidad $o \in Y$. Por ejemplo, uno de los invariantes más importantes de X son ciertos *grupos de cohomología* $H^{i,j} := H^i(X, \mathscr{O}_X(j))$. No importa aquí cómo se definen pero son ciertos $\mathscr{k}$-módulos de dimensión finita. Por otro lado, a la singularidad $\mathscr{O}_{Y,o}$ se le asocian ciertos *grupos de cohomología local* $H^i_{\mathfrak{m}_o}(\mathscr{O}_{Y,o})$, los cuáles son $\mathscr{O}_{Y,o}$-módulos graduados. Resulta que

$$H^{i+1}_{\mathfrak{m}_o}(\mathscr{O}_{Y,o}) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H^{i,j}$$

como módulos graduados. En otras palabras, resulta que al estudiar la cohomología local de la singularidad $o \in Y$ estamos estudiando la cohomología de la variedad proyectiva X!

Para resumir, podemos usar la siguiente analogía cosmológica. Pensemos en las variedades proyectivas como todos los posibles universos, en las singularidades como agujeros negros (o sus singularidades), y en la cosmología como la geometría. Entonces, los universos tienen agujeros negros de manera esencial y estos repercuten en su cosmología. Más aún, el origen mismo de un universo es una singularidad.

2.5. El enfoque algebraico abstracto y anillos regulares. Recuerde que todo anillo ($\neq 0$) posee al menos un ideal maximal; ver [AM69, Theorem 1.3].[4] Un anillo local $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ es una anillo con un único ideal maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo residual $\mathscr{k} = R/\mathfrak{m}$. De ahora en adelante, asumimos que todos los anillos son noetherianos. En tal caso, el $\mathscr{k}$-módulo $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \otimes_R \mathscr{k}$

[4]Por anillo siempre queremos decir anillo conmutativo con identidad 1.

es de dimensión finita y coincide con el mínimo número de generadores $\mu(\mathfrak{m})$ de $\mathfrak{m}$. Más aún, $\dim R \leq \mu(\mathfrak{m})$ y en particular R es de dimensión finita.[5] Ver [AM69, Corollary 11.15].

Ejemplo 2.24 (Anillos de series de potencias y anillos locales completos)**.** Sea $\mathcal{k}$ un cuerpo. El anillo de *series de potencias* $\mathcal{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ en n variables $x_1,\dots,x_n$ con coeficientes en $\mathcal{k}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)$ y cuerpo residual $\mathcal{k}$. Recuerde que un elemento de $\mathcal{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ es una serie de potencias formal $\sum_{i_1,\dots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ con $a_{i_1,\dots,i_n}\in\mathcal{k}$. Se dice que es formal porque no hay ninguna noción de convergencia involucrada. Un polinomio es una serie de potencias donde todos salvo una cantidad finita de coeficientes son cero. En particular, $\mathcal{k}[x_1,\dots,x_n]$ es un subanillo de $\mathcal{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$. Se dice que $\mathcal{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ es la completación $(x_1,\dots,x_n)$-ádica de $\mathcal{k}[x_1,\dots,x_n]$.

Note que todo cociente $R\coloneqq\mathcal{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]/\mathfrak{a}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)R$ y cuerpo residual $\mathcal{k}$. A estos anillos locales se les conoce como *anillos completos sobre* $\mathcal{k}$.[6] De hecho, todo anillo local $(R,\mathfrak{m},\mathcal{k})$ admite una *completación* $(\hat{R},\hat{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}\hat{R},\mathcal{k})$ y si R contiene un cuerpo entonces resulta que $\hat{R}$ es un cociente de un anillo de series de potencias (*i.e.* es un anillo completo sobre $\mathcal{k}$). Por ejemplo, si R es la localización de $\mathcal{k}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$ en $(x_1,\dots,x_n)$ entonces su completación viene dada por $\hat{R}=\mathcal{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]/(f_1,\dots,f_m)$.

Ejercicio 2.20. Sea R un anillo y $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$ un ideal primo. Entonces, la localización $(R_\mathfrak{p},\mathfrak{p}R_\mathfrak{p},\kappa(\mathfrak{p})\coloneqq R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ es un anillo local. Muestre que $\kappa(\mathfrak{p})$ es el cuerpo de fracciones del dominio entero $R/\mathfrak{p}$.

Ejercicio 2.21 (Característica)**.** Recuerde que la característica de un anillo R es el único número natural $\operatorname{char}R\in\mathbb{N}$ tal que $(\operatorname{char}R)\subset\mathbb{Z}$ es el kernel del homomorfismo canónico de anillos $\mathbb{Z}\longrightarrow R$. Pruebe que un anillo R contiene un cuerpo sii $\operatorname{char}R=\operatorname{char}\kappa(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$. En particular, en tal caso, $(\operatorname{char}R)\subset\mathbb{Z}$ es un ideal primo, *i.e.* $\operatorname{char}R=0$ o un número primo. Por esta razón, a los anillos que contienen un cuerpo se les conoce como anillos de *equi-característica* $p\geq 0$. A los anillos que no contienen un cuerpo se les conoce como anillos de *característica mixta* y su estudio es muchísimo más difícil. En este curso nos concentraremos únicamente en anillos de *equi-característica*.

Ejercicio 2.22. Dé un ejemplo de un anillo local y no-local de característica mixta.

Definición 2.25 (Anillo regular y singular)**.** Un anillo local $(R,\mathfrak{m},\mathcal{k})$ se dice ser *regular* si la desigualdad $\dim R\leq\mu(R)$ es una igualdad. De lo contrario, se dice que es *singular*.

El siguiente es un resultado no-trivial.

Teorema 2.26 (Serre [?])**.** *Un anillo local* $(R,\mathfrak{m},\mathcal{k})$ *es regular sii* $(R_\mathfrak{p},\mathfrak{p}R_\mathfrak{p},\kappa(\mathfrak{p}))$ *es regular para todo* $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R$.

Esto nos permite definir:

Definición 2.27. Un anillo (noetheriano) es regular si todas sus localizaciones en ideales primos son anillos (locales) regulares.

[5] Cuidado, no todo anillo noetheriano es de dimensión finita por un ejemplo famoso de Nagata. Ver [Sta20, Tag 02JC]

[6] En realidad, la definición es muy distinta pero es equivalente a esta debido al teorema de estructural de Cohen [?].

Teorema 2.28. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ un anillo local y sea $(\hat{R}, \mathfrak{m}\hat{R}, \mathscr{k})$ su completación.*[7] *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ *es regular.*
2. $(\hat{R}, \mathfrak{m}\hat{R}, \mathscr{k})$ *es regular.*
3. *Si adicionalmente R y entonces $\hat{R}$ contienes un cuerpo, $(\hat{R}, \mathfrak{m}\hat{R}, \mathscr{k})$ es isomorfo (como anillo local) a $\mathscr{k}[\![x_1, \ldots, x_{\dim R}]\!]$.*

Observación 2.29. Lo anterior nos indica que podemos pensar en una singularidad sobre $\mathscr{k}$ (o bien una $\mathscr{k}$-singularidad) abstractamente como una $\mathscr{k}$-álgebra local completa $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ salvo isomorfismo. Sin embargo, en lo que sigue, vamos a pensar en una singularidad simplemente como un anillo local pues, en general, las propiedades de las singularidades son invariantes bajo completaciones.

3. El endomorfismo de Frobenius y el teorema de Kunz

De ahora en adelante, fijamos un número primo p y nos enfocamos en los anillos de equicaracterística $p > 0$. Es decir, de ahora en adelante trabajaremos con $\mathbb{F}_p$-álgebras. También usaremos la notación $q := p^e$.

Definición 3.1 (Frobenius)**.** El *endomorfismo de Frobenius* de una $\mathbb{F}_p$-álgebra se define como $F = F_R \colon R \longrightarrow R$ donde $F \colon r \mapsto r^p$. De igual manera, se define su e-ésima iteración como $F^e \colon r \mapsto r^q$.

Ejercicio 3.1. Muestre que $F^e \colon R \longrightarrow R$ es un homomorfismo de $\mathbb{F}_p$-álgebras.

Ejercicio 3.2. Pruebe que $F^e \colon R \longrightarrow R$ es inyectivo sii R es reducido.

Ejercicio 3.3. Recuerde o pruebe que un anillo R es reducido sii su anillo total de fracciones $K := \mathscr{K}(R)$ es un producto de cuerpos $\prod_i K_i$. En particular, si R es reducido entonces podemos definir una clausura algebraica $\bar{K} := \prod_i \bar{K}_i$ y así el anillo de raíces q-ésimas $R^{1/q} := \{r^{1/q} \in \bar{K} \mid r \in R\}$ está bien definido. Muestre que $F^e \colon R \longrightarrow R$ se puede identificar con $R \subset R^{1/q}$.

Definición 3.2 (Restricción de escalares con respecto a Frobenius)**.** Sea M un R-módulo. Definimos el R-módulo $F^e_* M := \{F^e_* m \mid m \in M\}$ donde $F^e_* m + F^e_* m' := F^e_*(m + m')$ pero $r F^e_* m := F^e_* r^q m$. Similarmente, si $M = S$ es una R-álgebra entonces $F^e_* S$ es una R-álgebra al definir $(F^e_* s)(F^e_* s') := F^e_* s s'$.

Observación 3.3. En otras palabras, $F^e_* M$ es idéntico a M como grupo abeliano pero la estructura de R-módulo ha sido modificada a través de Frobenius. Del mismo modo, $F^e_* S$ es idéntico a S como anillo; lo que cambia es la estructura de R-álgebra.

Ejercicio 3.4. Muestre que $W^{-1} F^e_* R = F^e_* W^{-1} R$ para todo conjunto multiplicativo $W \subset R$.

Definición 3.4. Una $\mathbb{F}_p$-álgebra es *F-finita* si $F^e_* R$ es un R-módulo finitamente generado para algún/todo $e \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.5. Muestre que un cuerpo $\mathscr{k}/\mathbb{F}_p$ es F-finito sii $[\mathscr{k}^{1/p} : \mathscr{k}] < \infty$. Concluya que un cuerpo perfecto (*e.g.* algebraicamente cerrado) es F-finito.

Ejercicio 3.6. Sea R una $\mathbb{F}_p$-álgebra F-finita. Muestra que:

[7] La completación preserva la dimensión.

1. $R/\mathfrak{a}$ es F-finita para todo ideal $\mathfrak{a} \subset R$.
2. $W^{-1}R$ es F-finita para todo conjunto multiplicativo $W \subset R$.
3. $R[x_1, \ldots, x_n]$ y $R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ son F-finitas.

Concluya que localizaciones y completaciones de álgebras finitamente generadas sobre cuerpos F-finitos son F-finitas (estos son los anillos básicos de la geometría algebraica).

Teorema 3.5 ([Kun76]). *Una $\mathbb{F}_p$-álgebra local $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ es F-finita sii $\mathscr{k}$ es un cuerpo F-finito y R es excelente.*

Teorema 3.6 ([Kun76]). *Todo anillo F-finito es de dimensión finita.*

Convención 3.7. De ahora en adelante asumiremos que todos los anillos son F-finitos (además de noetherianos). Estas son las condiciones básicas de finitud de la teoría de F-singularidades.

Ejercicio* 3.7. Para los que saben de completaciones, sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ un anillo local F-finito. Muestre que el diagram

$$\begin{tikzcd} F^e_* R \arrow[r] & F^e_* \hat{R} \\ R \arrow[u] \arrow[r] & \hat{R} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

es cartesiano. En otras palabras, $\hat{R} \otimes_R F^e_* R \to F^e_* \hat{R}$ es un isomorfismo. Concluya que si R es reducido entonces $\hat{R}$ lo es también.

Dicho todo lo anterior, ya estamos en condición de enunciar el teorema génesis de la teoría.

Teorema 3.8 (El teorema de Kunz [Kun69]). *Una $\mathbb{F}_p$-álgebra R es regular sii $F^e_* R$ es un R-módulo proyectivo para algún/todo $e > 0$. En particular, una $\mathbb{F}_p$-álgebra local $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ es regular sii $F^e_* R$ es un R-módulo libre para algún/todo $e > 0$.*

Ejercicio 3.8. Sea $\mathscr{k}$ un cuerpo F-finito. Use el teorema de Kunz para probar que los anillos $\mathscr{k}[x_1, \ldots, x_n]$ y $\mathscr{k}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ son regulares.

Ejercicio 3.9. Use el teorema de Kunz para mostrar el teorema de Serre (ver Teorema 2.26) en el caso de equi-característica positiva.

Observación 3.9. A grandes rasgos, la teoría de F-singularidades estudia singularidades a través de la falta de libertad de la familia de los R-modulos $\{F^e_* R\}_e$. Aquí nos enfocaremos en como hacer esto de manera numérica y elemental.

Teorema 3.10 ([Gab04]). *Todo anillo F-finito es un cociente de un anillo regular.*

Problema Abierto 1. Determinar si todo anillo F-finito es una extensión finita de un anillo regular.

4. F-signatura y multiplicidad de Hilbert–Kunz

Ya ahora entramos a estudiar el tema principal de estas notas. Para esto, necesitamos primero estudiar varias generalidades sobre la noción de rango. En esta sección, seguimos en gran parte el trabajo de Polstra y Tucker [PT18].

4.1. Sobre varias nociones de rango.

Definición 4.1 (Rango)**.** Sea R un dominio entero con cuerpo de fracciones K. El *rango (genérico)* de un R-módulo M finitamente generado se define como

$$\nu(M) \coloneqq \dim_K M \otimes_R K.$$

Observación 4.2. Recuerde que, por el lema de Nakayama, si $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ es un anillo local y M es un R-módulo finitamente generado entonces

$$\mu(M) \coloneqq \dim_{\mathscr{k}} M \otimes_R \mathscr{k} = \dim_{\mathscr{k}} M/\mathfrak{m}M$$

es el mínimo número de generadores de M. Este número se puede pensar como el *rango residual* de M.

Ejercicio 4.1 (Sub-aditividad)**.** Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ un anillo local. Sea

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

sea una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados. Muestre que

$$\mu(M) \leq \mu(M') + \mu(M'')$$

mientras que

$$\nu(M) = \nu(M') + \nu(M'').$$

La siguiente observación nos servirá como motivación.

Ejercicio 4.2. Sean $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ un dominio local y M un R-módulo finitamente generado. Pruebe que $\nu(M) \leq \mu(M)$ y que la igualdad ocurre sii M es libre de rango $\nu(M) = \mu(M)$.

Ejercicio 4.3. Sean $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ un dominio local y M un módulo finitamente generado. Pruebe que le conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{hay una sucesión exacta } M \longrightarrow R^{\oplus n} \longrightarrow 0\}$$

es no vacío y acotado superiormente por $\nu(M)$. Dado que $R^{\oplus n}$ es proyectivo, la existencia de tal sucesión exacta es lo mismo que decir que $R^{\oplus n}$ es un sumando directo de M.

Definición 4.3 (Rango libre)**.** En el marco de Ejercicio 4.3, el *rango libre* de M se define como

$$\eta(M) \coloneqq \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \mid \text{hay una sucesión exacta } M \longrightarrow R^{\oplus n} \longrightarrow 0\}.$$

En particular, dado un módulo M sobre un dominio local $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$, tenemos las siguientes desigualdades

$$\eta(M) \leq \nu(M) \leq \mu(M).$$

Ejercicio 4.4. En el marco de Ejercicio 4.3, pruebe que M es un módulo libre sii es libre de torsión y $\eta(M) = \nu(M)$. Muestre que $\eta(M) = \mu(M)$ sii M es libre.

Ejercicio 4.5. En el marco de Ejercicio 4.3, pruebe que $\eta(M)$ está caracterizado como el único número $n \in \mathbb{N}$ tal que $M \cong R^{\oplus n} \oplus N$ y donde N no admite una sobreyección sobre R (*i.e.* $\operatorname{Hom}_R(N, R)/\operatorname{Hom}(N, \mathfrak{m}) = 0$).

Ejercicio 4.6. En el marco de Ejercicio 4.3, pruebe que

$$M^{\top} \coloneqq \{m \in M \mid \varphi(m) \in \mathfrak{m} \text{ para todo } \phi \in \operatorname{Hom}_R(M,R)\}$$

es un submódulo de M que contiene $\mathfrak{m}M$. En particular, $M/M^{\top}$ es un $\Bbbk$-módulo. Pruebe que

$$\eta(M) = \dim_{\Bbbk} M/M^{\top}.$$

De manera dual, note que se tienen inclusiones de R-módulos

$$\mathfrak{m}\operatorname{Hom}_R(M,R) \subset \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{m}) \subset \operatorname{Hom}_R(M,R)$$

por lo cual $\operatorname{Hom}_R(M,R)/\operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{m})$ es un $\Bbbk$-módulo. Pruebe que

$$\eta(M) = \dim_{\Bbbk} \operatorname{Hom}_R(M,R)/\operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{m}).$$

Más generalmente, sea $C \subset \operatorname{Hom}_R(M,R)$ es un submódulo. Denote $C^{\mathrm{ns}} \coloneqq C \cap \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{m})$ y

$$M^{\top,C} \coloneqq \{m \in M \mid \varphi(m) \in \mathfrak{m} \text{ para todo } \phi \in C\}.$$

Pruebe que C/C^{ns} y $M/M^{\top,C}$ son $\Bbbk$-módulos cuya dimensión es el rango máximo de un cociente libre $M \twoheadrightarrow R^{\oplus n}$ donde las correspondientes n proyecciones $M \longrightarrow R$ pertenecen a C.

El resultado del siguiente ejercicio es absolutamente fundamental en lo que sigue.

Ejercicio 4.7 (Sub-aditividad)**.** En el marco de Ejercicio 4.3, considere una sucesión exacta de R-módulos finitamente generados

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Muestre que

$$\eta(M'') \leq \eta(M) \leq \eta(M') + \mu(M'').$$

Sugerencia: Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que there is a homomorfismo of R-módulos $\phi\colon M \longrightarrow R^{\oplus n}$ tal que $M' \longrightarrow M \longrightarrow R^{\oplus n}$ is surjective. Argumente que esto induce un diagrama conmutativo de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "="] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & \ker\phi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Y que entonces

$$\eta(M) \leq n + \eta(\ker\phi) \leq \eta(M') + \mu(M'').$$

Ejercicio 4.8. Sea M un módulo finitamente generado sobre un dominio entero R con cuerpo de fracciones K. Muestre que hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R^{\oplus \nu(M)} \longrightarrow M \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

tal que $K \otimes_R T = 0$, *i.e.* T es un módulo de torsión. Dado que T es finitamente generado, existe $0 \neq r \in R$ tal que $rT = 0$. *Sugerencia:* tal sucesión se obtiene de una K-base de $K \otimes_R M$ cuyos elementos están en la image del homomorfismo canónico $M \longrightarrow K \otimes_R M$.

Pruebe que si M es libre de torsión (*i.e.* $M \longrightarrow K \otimes_R M$ es inyectivo), entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R^{\oplus \nu(M)} \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

tal que $K \otimes_R T = 0$. *Sugerencia:* Escoja una K-base para $K \otimes_R M = \bigoplus_{i=1}^{\nu(M)} Ke_i$. Muestre que existe $0 \neq r \in R$ tal que $rM \subset \bigoplus_{i=1}^{\nu(M)} Re_i$ (limpie los denominadores de generadores de M). Note que $\{e'_i \coloneqq e_i/r\}$ es una nueva K-base de $K \otimes_R M$ y $M \subset \bigoplus_{i=1}^{\nu(M)} Re'_i$.

4.2. El rango genérico de $F^e_* R$. Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ es un dominio local. Note que

$$\nu(F^e_* R) = [K^{1/q} : K] = [K^{1/p} : K]^e$$

y recuerde que $\log_p [K^{1/p} : K] \in \mathbb{N}$. Resulta que

Teorema 4.4. *Con la notación anterior,* $\log_p [K^{1/p} : K] = \log_p [\mathscr{k}^{1/p} : \mathscr{k}] + \dim R$. *En otras palabras,*

$$\nu(F^e_* R) = q^{\log_p [\mathscr{k}^{1/p} : \mathscr{k}] + \dim R}$$

Bosquejo de la prueba. El primer paso es reducir al caso completo. Esto se hace al utilizar el Ejercicio* 3.7. Esto nos permite concluir que $\hat{R}_\mathfrak{p}$ es un cuerpo para todo primo minimal de $\hat{R}$. Más aún, también se concluye que $\hat{R}_\mathfrak{p} \otimes_K K^{1/p} \longrightarrow \hat{R}_\mathfrak{p}^{1/p}$ es un isomorfismo (*i.e.* $\hat{R}_\mathfrak{p}/K$ es separable). En particular,

$$[\hat{R}_\mathfrak{p}^{1/p} : \hat{R}_\mathfrak{p}] = [K^{1/p} : K]$$

Recuerde que $\hat{R}_\mathfrak{p}$ es entonces el cuerpo de fracciones de $\hat{R}/\mathfrak{p}$; ver Ejercicio 2.20. Así, tomando $\mathfrak{p}$ tal que $\dim \hat{R}/\mathfrak{p} = \dim \hat{R} = \dim R$ podemos asumir que R es completo.

Asumiendo que R es completo, el siguiente caso es reducir al caso en el que R es regular. Por el teorema estructural de Cohen, podemos decir que R es una extensión finita de $A \coloneqq \mathscr{k}[\![x_1, \ldots, x_{\dim R}]\!]$. Entonces, como hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A^{1/p} \arrow[r] & R^{1/p} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[u] \end{tikzcd}$$

de A-módulos finitamente generados. De aquí se concluye que $\nu_R(R^{1/p}) = \nu_A(A^{1/p})$. En otras palabras, podemos asumir que $R = A$. Este caso se deja de ejercicio. □

4.3. La multiplicidad de Hilbert–Kunz. Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ un dominio local. Note que

$$\mu(F^e_* R) = \dim_\mathscr{k} F^e_* R/\mathfrak{m} F^e_* R = \dim_\mathscr{k} F^e_* R/F^e_* \mathfrak{m}^{[q]}$$

donde $\mathfrak{m}^{[q]}$ denota la e-ésima *potencia de Frobenius* de $\mathfrak{m}$:

Definición 4.5 (Potencias de Frobenius)**.** Dado un ideal $\mathfrak{a} \subset R$ se define $\mathfrak{a}^{[q]}$ como el ideal de R generado por todas las potencias q-ésimas de elementos de $\mathfrak{a}$.

Ejercicio 4.9. Pruebe que si $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ entonces $\mathfrak{a}^{[q]} = (f_1^q, \ldots, f_m^q)$. Muestre que $\mathfrak{a} F^e_* R = F^e_* \mathfrak{a}^{[q]}$.

En particular,

$$\mu(F^e_* R) = [\mathscr{k}^{1/q} : \mathscr{k}] \dim_{\mathscr{k}^{1/q}} F^e_* R/F^e_* \mathfrak{m}^{[q]} = [\mathscr{k}^{1/q} : \mathscr{k}] \dim_\mathscr{k} R/\mathfrak{m}^{[q]}.$$

Por lo tanto,

$$1 \leq \frac{\mu(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} = \frac{[\mathscr{k}^{1/q} : \mathscr{k}] \dim_\mathscr{k} R/\mathfrak{m}^{[q]}}{q^{\log_p [\mathscr{k}^{1/p} : \mathscr{k}] + \dim R}} = \frac{\dim_\mathscr{k} R/\mathfrak{m}^{[q]}}{q^{\dim R}}$$

En particular, el teorema de Kunz se puede reescribir de la siguiente forma.

Teorema 4.6 (Kunz)**.** *Un dominio local* $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ *es regular sii* $\frac{\dim_{\mathscr{k}} R/\mathfrak{m}^{[q]}}{q^{\dim R}} = 1$ *para algún/todo* $e > 1$*.*

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.7 (Multiplicidad de Hilbert–Kunz)**.** La *multiplicidad de Hilbert–Kunz* de un dominio local $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ se define como el límite

$$e_{\mathrm{HK}}(R) \coloneqq \lim_{e\to\infty} \frac{\dim_{\mathscr{k}} R/\mathfrak{m}^{[q]}}{q^{\dim R}}.$$

Más generalmente, si $\mathfrak{a}$ es un ideal $\mathfrak{m}$-primario (*i.e.* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$), se define su multiplicidad de Hilbert–Kunz como el límite

$$e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) \coloneqq \lim_{e\to\infty} \frac{\dim_{\mathscr{k}} R/\mathfrak{a}^{[q]}}{q^{\dim R}}$$

Teorema 4.8. *Con la misma notación que antes,* $1 \leq e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a})$ *existe en* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Ver Sección 4.5 adelante. □

Teorema 4.9 ([WY00, Theorem 1.5] y [BE04, Theorem 2.7])**.** *Con notación como antes,* $e_{\mathrm{HK}}(R) = 1$ *sii* R *es regular. Más aún, si* $e_{\mathrm{HK}}(R) < 1 + \frac{1}{p^d d!}$ *con* $d \coloneqq \dim R$ *entonces* R *es regular.*

Demostración. La prueba es difícil y va más allá del alcance de estas notas. Se sugiere a quien esté interesado ver la referencia provista. □

Ejercicio 4.10. Pruebe que si $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ es regular entonces $e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) = \dim_{\mathscr{k}} R/\mathfrak{a}$.

Observación 4.10. En general, entre más grande es el valor de $e_{\mathrm{HK}}(R)$ peor es la singularidad de R. En general, calcular $e_{\mathrm{HK}}(R)$ se considera muy difícil. Hay sin embargo algunos cálculos disponibles en la literatura. Por ejemplo, Han y Monsky han estudiado $\mu(F^e_* R)$ para la singularidad $R = \mathbb{F}_p[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/(x_1^{d_1} + \cdots + x_n^{d_n})$ [HM93]. Resulta $\mu(F^e_* R)$ exhibe un comportamiento complejo y misterioso. En el caso $p = 5$ y $n = 4 = d_i$, se tiene que

$$\mu(F^e_* R) = \frac{168}{61}(5^e)^3 - \frac{107}{61}3^e$$

por lo cual $e_{\mathrm{HK}}(R) = 168/61$. Similarmente, si $p = 3$, $n = 5$ y $d_i = 2$, se obtiene que

$$\mu(F^e_* R) = \frac{23}{19}(3^e)^4 - \frac{4}{19}5^e$$

por lo cual $e_{\mathrm{HK}}(R) = 23/19$. Luego, Gessel y Monsky calcularon el límite de e_{HK} cuando $p \longrightarrow \infty$; ver [GM10]. Por ejemplo, si $n = 4 = d_i$ se obtiene que

$$e_{\mathrm{HK}}(R) = \begin{cases} \frac{8}{3}\frac{2p^2+2p+3}{2p^2+2p+1} & p \equiv 1 \text{ mód } 4 \\ \frac{8}{3}\frac{2p^2-2p+3}{2p^2-2p+1} & p \equiv 3 \text{ mód } 4 \end{cases}$$

cuyo límite cuando $p \to \infty$ es $8/3$. Y para ponerle la cereza el pastel, Gessel y Monsky muestran que si n es arbitrario pero cada $d_i = 2$, entonces $\lim_{p\to\infty} e_{\mathrm{HK}}(R)$ es el coefficiente de z^{n-1} en la expansión de Taylor de $\sec z + \tan z$ (alrededor de 0).

Problema Abierto 2 (Racionalidad)**.** Se tiene que $e_{\mathrm{HK}}(R) \in \mathbb{Q}$ para toda singularidad R? Monsky ha conjeturado que la respuesta ha de ser negativa pues la multiplicidad de Hilber–Kunz de la singularidad $\mathbb{F}_2[\![x,y,z,u,v]\!]/(uv+x^3+y^3+xyz)$ parece ser $\frac{4}{3}+\frac{5}{98}\sqrt{7}$; ver [Mon08].

Problema Abierto 3 (Cota inferior)**.** Sea $\mathcal{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p>2$. Sea $e_{d,p}$ la multiplicidad de Hilbert–Kunz de $R_{p,d} \coloneqq \mathcal{k}[\![x_0,\ldots,x_d]\!]/(x_0^2+\cdots+x_d^2)$ con $p \neq 2$. Si R es una $\mathcal{k}$-singularidad y $e_{\mathrm{HK}}(R) < e_{d,p}$ entonces R es regular. Más aún, $e_{\mathrm{HK}}(R) = e_{p,d}$ sii $R \cong R_{p,d}$. Ver [WY05] para más detalles sobre este problema; donde es originalmente propuesto. También ver [JNS+23, Theorem 2.5] y las referencias ahí donde se muestra el estado del arte de este problema. El cual está resuelto afirmativamente si $d \leq 6$.

Ejercicio* 4.11. Sean $(R,\mathfrak{m},\mathcal{k},K)$ un dominio local y M un R-módulo finitamente generado. Muestre que la sucesión $\{\mu(F^e_*M)/\nu(F^e_*R)\}_{e>0}$ es acotada. Siga los siguientes pasos. Primero, reduzca al caso en que $M=R$; use que M es un cociente de un módulo libre de rango finito. Luego, proceda por inducción sobre $\lambda(R) \coloneqq \log_q \nu(F^e_*R) \in \mathbb{N}$. Si $\lambda(R)=0$ entonces R es un cuerpo perfecto y el enunciado es trivial. Para el paso inductivo, considere una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R^{\oplus p^{\lambda(R)}} \longrightarrow F_*R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

tal que $K \otimes_R T = 0$ (ver Ejercicio 4.8). En particular, existe $0 \neq c \in R$ tal que $cT=0$, lo que quiere decir que T es un R/c-módulo.

Dado que $\dim R/c < \dim R$, aquí nos gustaría poder decir que $\lambda(R/c) < \lambda(R)$ y usar la hipoótesis inductiva. Sin embargo, esto no es posible tal cual pues R/c no es necesariamente un dominio entero. Para solventar esto, recuerde que todo módulo fiinitamente generado N sobre un anillo noetheriano A admite una filtración

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n = N$$

donde $N_i/N_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$ para algún $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$; ver [AM69, Ch. 7, Excercise 18] o bien [Mat89, Theorem 6.4]. Aplique este resultado a T para obtener una filtración

$$0 = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n = T$$

en donde $T_i/T_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ y $c \in \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R$. En particular, $\dim R/\mathfrak{p}_i \leq \dim R$ y así $\lambda(R/\mathfrak{p}_i) < \lambda(R)$. Use sub-aditividad y la hipótesis inductiva para concluir que

$$\mu(F^e_*T) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F^e_*A/\mathfrak{p}_i) \leq Cq^{\lambda(R)-1}.$$

para alguna constante $C = C(R,T)$ y para todo $e \in \mathbb{N}$.

En seguida, use la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F^{e-1}_*R^{\oplus p^{\lambda(R)}} \longrightarrow F^e_*R \longrightarrow F^{e-1}_*T \longrightarrow 0$$

para concluir que

$$\mu(F^e_*R) \leq p^{\lambda(R)}\mu(F^{e-1}_*R) + Cq^{\lambda(R)-1}$$

para todo $e \in \mathbb{N}$. Divida por $\nu(F^e_*R) = q^{\lambda(R)}$ para obtener

$$\frac{\mu(F^e_*R)}{\nu(F^e_*R)} \leq \frac{\mu(F^{e-1}_*R)}{\nu(F^{e-1}_*R)} + \frac{C}{q}$$

para todo $e \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\frac{\mu(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} \leq C + \frac{C}{p} + \frac{C}{p^2} + \cdots + \frac{C}{p^e} \leq \frac{C}{1-1/p} \leq 2C.$$

Ejercicio 4.12. En el marco de Ejercicio* 4.11, note que lo anterior también prueba que si T es un R-módulo de torsión finitamente generado entonces la sucesión $\{q\mu(F^e_* T)/\nu(F^e_* R)\}_{e>0}$ es acotada.

4.4. La F-signatura y F-regularidad.

Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathcal{k}, K)$ un dominio local. Entonces

$$\eta(F^e_* R) = \dim_{\mathcal{k}} F^e_* R/(F^e_* R)^{\top}$$

según Ejercicio 4.6.

Definición 4.11 (Ideales de F-escición)**.** Sea $I_e = I_e(R)$ el ideal de R definido como

$$I_e \coloneqq \{r \in R \mid \phi(F^e_* r) \in \mathfrak{m} \text{ for all } \phi \in \operatorname{Hom}_R(F^e_* R, R)\}.$$

A este ideal se le conoce como el *e-ésimo ideal de F-escición.*

Ejercicio 4.13. Muestre que I_e es en efecto un ideal y que $(F^e_* R)^{\top} = F^e_* I_e$.

Ejercicio 4.14. Muestre que $\mathfrak{m}^{[q]} \subset I_e$ y que

$$\eta(F^e_* R) = [\mathcal{k}^{1/q} : \mathcal{k}] \dim_{\mathcal{k}} R/I_e.$$

Muestre también que $I_e^{[p]} \subset I_{e+1}$.

En particular,

$$0 \leq \frac{\eta(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} = \frac{\dim_{\mathcal{k}} R/I_e}{q^{\dim R}} \leq 1$$

Ejercicio 4.15. Concluya que R es regular sii $\frac{\dim_{\mathcal{k}} R/I_e}{q^{\dim R}} = 1$ para algún/todo $e > 0$.

Ejercicio 4.16. Muestre que R es regular sii $\mathfrak{m}^{[q]} = I_e$ para algún/todo $e > 0$.

Ejercicio 4.17. Pruebe que $r \notin I_e$ sii $F^e_* r$ genera un summando directo de $F^e_* R$.

Ejercicio 4.18. Muestre que se tiene una cadena descendente de ideales

$$R \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

Ejercicio 4.19. Muestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

1. I_e es un ideal propio para algún e.
2. I_e es un ideal propio para todo e.
3. $\bigcap_e I_e$ es un ideal propio.

Pruebe que en tal caso $\beta(R) \coloneqq \bigcap_e I_e$ es un ideal primo, el cual se conoce como el *ideal primo de F-escición.*

Definición 4.12 (F-pureza y F-regularidad)**.** Se dice que R es *F-puro/escindido* si cualquiera de los enunciados en el Ejercicio 4.19 se cumplen. Se dice que R es F-regular si es F-puro y $\beta(R) = 0$.

Ejercicio 4.20. Muestre que un anillo regular local es F-regular.

Ejercicio 4.21. Muestre que R es F-regular sii para todo $0 \neq r \in R$ existe un $e \gg 0$ tal que $F^e_* r$ genera un summando directo de $F^e_* R$ (*i.e.* existe $\phi \in \operatorname{Hom}_R(F^e_* R, R)$ tal que $\phi(F^e_* r) = 1$).

Ejercicio 4.22. Un ideal $\mathfrak{a} \subset R$ se dice ser de *Cartier* (tcc *uniformemente compatible*) si $\phi(F^e_*\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_R(F^e_*R, R)$ y todo $e > 0$. Muestre que $\beta(R)$ es un ideal de Cartier y que contiene a cualquier otro ideal propio de Cartier. Concluya que R es F-regular sii sus únicos ideales de Cartier son (0) y $(1) = R$.

Definición 4.13 (F-regularidad y F-pureza de anillos reducidos.)**.** Más generalmente, un anillo reducido R (además de noetheriano y F-finito) se dice ser *F-regular* (resp. *F-puro*) si para todo elemento regular $r \in R$ (resp. para $r = 1$) existe $e \in \mathbb{N}$ y $\phi \in \mathrm{Hom}_R(F^e_*R, R)$ tal que $\phi(F^e_*r) = 1$.

Resulta que esta definición recupera su versión local, el cual es de todos modos el caso más importante como establece la siguiente proposición.

Proposición 4.14 ([HH89])**.** *Los siguientes enunciados son verdaderos:*
1. *Un anillo F-regular es un producto de dominios enteros F-regulares.*
2. *Un anillo local F-regular es un dominio entero.*
3. *Un anillo es F-regular sii todos sus localizaciones son F-regulares.*
4. *Un anillo es F-puro sii todas sus localizaciones son F-puras.*
5. *Un anillo regular es normal y de Cohen–Macaulay.*

Ejercicio 4.23. Suponga que se tiene un homomorfismo de anillos de dominios enteros $\theta\colon R \longrightarrow S$ que se escinde como homomorfismo de R-módulos (*i.e.* existe $t \in \mathrm{Hom}_R(S, R)$ tal que $t \circ \theta = \mathrm{id}$). En tal caso se dice que R es un sumando directo de S (explique porqué está terminología tiene sentido). Muestre que si S es F-regular (resp. F-puro) entonces R es F-regular (resp. F-puro). Concluya que sumandos directos de dominios enteros regulares son F-regulares.[8]

Ejercicio 4.24. Sea G un grupo finito que actúa (por la izquierda) sobre un dominio entero S por medio de homomorfismos de anillos. Pruebe que si S es F-regular (resp. F-puro) y p no divide al orden de G, entonces el anillo de invariantes S^G es F-regular (F-puro). *Sugerencia:* Considere el operador de Reynolds $s \mapsto \sum_{g\in G} gs$.

Ejercicio 4.25. Pruebe que el álgebra Veronese
$$V^{(d)} := \Bbbk[x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \mid i_0 + \cdots + i_n = d] \subset \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$$
es F-regular.[9]

Ejercicio 4.26. Muestre que el álgebra de Segre
$$R^{m\times n} := \Bbbk[x_i y_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n] \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$$
es F-regular.[10]

Observación 4.15. Los tres ejemplos/ejercicios anteriores son parcialmente un caso particular de un teorema seminal de Hochster y Roberts que establece que si un grupo algebraico linealmente reductivo actúa (linealmente) sobre un anillo de polinomios entonces el anillo de

[8]El enunciado de este ejercicio es verdadero aún si no se asume que R y S sean dominios enteros. Sin embargo, la reducción a este caso es algo tediosa.

[9]El nombre proviene del hecho que este anillo representa el cono sobre el encaje de Veronese $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$, el cual es dado por $[a_0 : \cdots : a_n] \mapsto [\cdots : a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n} : \cdots]_{i_0+\cdots+i_n=d}$.

[10]El nombre se debe a que este anillo corresponde al cono sobre el encaje de Segre $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn-1}$, el cual es dado por la aplicación $([a_1 : \ldots : a_m], [b_1 : \ldots : b_n]) \mapsto [\cdots : a_i b_j : \cdots]$.

invariantes es F-regular [HR74]. Este trabajo se puede considerar el lugar de nacimiento de la F-regularidad.

Ejemplo 4.16 (Anillos determinantales)**.** Note que el subanillo de Segre es la $\Bbbk$-subálgebra de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ generada por las entradas del producto de matrices

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$$

En general, nos podemos dar dos matrices de variables $\boldsymbol{x} = [x_{i,j}]_{m\times t}$ y $\boldsymbol{y} = [y_{i,j}]_{t\times n}$ donde $1 \leq t \leq m, n$ y consideras la $\Bbbk$-subálgebra de $\Bbbk[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ generada por las entradas del producto de matrices $\boldsymbol{xy}$, digamos $R_t^{m\times n}$. A tales $\Bbbk$-álgebras se les conoce como *anillos determinantales*. La razón de este nombre es que el siguiente homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras es un isomorfismo

$$\Bbbk[\boldsymbol{z} = [z_{i,j}]_{m\times n}]/I_{t+1}(\boldsymbol{z}) \xrightarrow{z_{i,j} \mapsto \sum_{k=1}^{t} x_{i,k} y_{k,j}} R_t^{m\times n}$$

donde $I_{t+1}(\boldsymbol{z})$ denota el ideal generado por todos los $(t+1)$-menores de $\boldsymbol{z}$. Los anillos determinantales también son F-regulares pero la prueba es mucho más difícil [HH94], [MP, §8].[11] Es bueno notar que $Z_{\mathbb{A}^{mn}}(I_{t+1}(\boldsymbol{z}))$ es el conjunto de matrices $m \times n$ sobre $\Bbbk$ de rango $\leq t$.

Definición 4.17 (F-signatura)**.** La *F-signatura* de un dominio local $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk, K)$ se define como el límite

$$s(R) \coloneqq \lim_{e\to\infty} \frac{\dim_{\Bbbk} R/I_e}{q^{\dim R}}.$$

Teorema 4.18 ([Tuc12])**.** *$s(R)$ existe en* $\mathbb{R} \cap [0, 1]$.

Demostración. Ver Sección 4.5 abajo. ☐

Ejemplo 4.19. Sean $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y G un grupo finito que actúa linealmente sobre $S \coloneqq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ sin pseudo-reflexiones. Esto es lo mismo que decir que G es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ y ninguno de sus elementos fija un hiperplano. Si p no divide al orden de G, entonces

$$s\big(S^G\big) = \frac{1}{|G|},$$

Veremos una forma de probar esto abajo en **??**.

Ejemplo 4.20. Singh ha calculado la F-signatura de *anillos de semigrupos*; ver [Sin05]. Estos son $\Bbbk$-álgebras generadas por monomios, tales como las álgebras de Veronese y Segre. En el caso del álgebra de Veronese, Singh demuestra que

$$\dim_{\Bbbk} \left(V^{(d)}/I_e\right) = \frac{q^n}{d} + O(q^{n-1})$$

en donde $n = \dim V^{(d)}$. Por lo tanto,

$$s\big(V^{(d)}\big) = \frac{1}{n}.$$

[11]Al menos si $\Bbbk$ es infinito, $R_t^{m\times n}$ es el anillo de invariantes de la acción lineal de $\mathrm{GL}_t(\Bbbk)$ sobre $\Bbbk[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ donde $g \in \mathrm{GL}_t(\Bbbk)$ actúa como: $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}g^{-1}$, $\boldsymbol{y} \mapsto g\boldsymbol{y}$. No obstante, $R_t^{m\times n}$ no es un sumando directo de $\Bbbk[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ si $t > 1$. Ver [HJPS22].

Veremos como obtener esto de otra forma en **??**. En el caso del álgebra de Segre, Singh obtiene que $\dim_{\mathcal{k}} R^{m\times n}/I_e$ es dado de la siguiente forma. Primero escriba

$$(1+u+u^2+\cdots+u^{q-1})^m(1+v+v^2+\cdots+v^{q-1})^n =: \sum_{i,j} a_{i,j}u^iv^j$$

Entonces,

$$\dim_{\mathcal{k}} R^{m\times n}/I_e = \sum_k a_{kk}.$$

Esto implica que

$$s(R^{m\times n}) = \frac{A(\dim R, n)}{(\dim R)!}, \quad \dim R = m+n-1,$$

en donde $A(d,n)$ son los *números eulerianos*: $A(d,n)$ es el número de permutaciones $\sigma \in \mathrm{Sym}\{1,\dots,d\}$ tal que la cardinalidad de $\{i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$ es $n-1$. En su tesis doctoral [VK12], Von Korff generaliza los resultados de Singh al calcular la F-signatura de todos los anillos tóricos, los cuáles son F-regulares (siempre que son normales). Sin embargo, $R_t^{m\times n}$ no es un anillo tórico si $t>1$ y, hasta donde yo sé, su F-signatura es desconocida.

Problema Abierto 4. Calcule $\dim_{\mathcal{k}} R_t^{m\times n}/I_e$ cuando $t>1$.

Teorema 4.21 ([HL02, Corollary 16])**.** *$s(R)=1$ sii R es regular.*

Demostración. La dirección "$\Leftarrow$" se deja como ejercicio. Para la recíproca, suponga que R no es regular. Entonces, $F_*R = R^{\oplus a}\oplus M$ para algún $M\neq 0$ por el teorema de Kunz. En general, podemos escribir

$$F^e_*R = R^{\oplus a_e}\oplus M_e = R^{\oplus a_e}\oplus M^{\oplus b_e}\oplus N_e.$$

donde M_e no admite sumandos directos libres y N_e no admite sumandos directos isomorfos a R ni M.

Note que

$$F^{e+1}_*R = F_*R^{\oplus a_e}\oplus F_*M = R^{\oplus aa_e}\oplus M^{a_e}\oplus F_*M_e.$$

Por lo tanto,

$$b_{e+1}\geq a_e.$$

Por otro lado, $\nu(F^e_*R) = q^{\lambda(R)} \geq a_e+b_e$ y entonces

$$1 \geq \frac{a_e}{q^\lambda}+\frac{b_e}{q^\lambda} \geq \frac{a_e}{q^\lambda}+\frac{a_{e-1}}{p^\lambda p^{(e-1)\lambda}}.$$

Al tomar el límite $e\to\infty$ se obtiene

$$1\geq s(R)+s(R)/p^\lambda > s(R).$$

□

Teorema 4.22 ([AL03, Theorem 0.2])**.** *$s(R)>0$ sii R es F-regular.*

Hay una dirección de la equivalencia en Teorema 4.22 que podemos ver más rápidamente. En efecto, la sucesión

$$\left\{\frac{\eta(F^e_*R)}{\nu(F^e_*R/\beta(R))}\right\}_{e>0}$$

es acotada.[12] Lo cual se sigue de lo siguiente

[12]Al límite que se obtiene de esta sucesión se le conoce como *razón de F-escición* y es siempre positivo (asumiendo que R es F-puro). Sin embargo, no entraremos en detalles con este invariante.

Ejercicio 4.27. Pruebe que $\eta(F^e_* R) \leq \eta(F^e_* R/\beta(R))$. *Sugerencia:* use Ejercicio 4.22.

En particular,

Ejercicio 4.28. Concluya que si R no es F-regular (*i.e.* $\beta(R) \neq 0$) entonces $s(R) = 0$.

El autor desconoce de una prueba para el recíproco que sea sencilla y elemental. Pero quien esté interesado puede consultar [PT18].

Observación 4.23. En general, entre más pequeño es el valor de $s(R)$ peor es la singularidad de R.

El siguiente resultado exhibe la relación que hay entre la F-signatura y las multiplicidades de Hilbert–Kunz.

Teorema 4.24 ([Tuc12], [PT18, Corollary 6.11])**.** *Sea* $(R, \mathfrak{m}, \mathcal{k}, K)$ *un dominio local, entonces*

$$s(R) = \lim_{e \to \infty} \frac{e_{\mathrm{HK}}(I_e)}{q^{\dim R}}.$$

La prueba es un poco elaborada para estas notas, pero se motiva a quien lee consultar las fuentes propuestas. De hecho, la prueba original de Tucker para la existencia de la F-signatura se basa en esta aproximación en términos de multiplicidades de Hilbert–Kunz. En sus inicios, la teoría de la F-signatura dependía mucho de la más madura teoría de multiplicidades de Hilbert Kunz debido a resultados de este tipo.

Sin embargo, hay otro proceso al límite relacionando ambos invariantes que es aún más profundo. A saber,

Teorema 4.25 ([PT18, Theorem A])**.** *Sea* $(R, \mathfrak{m}, \mathcal{k}, K)$ *un dominio local. Entonces,*

$$s(R) = \inf_{\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}} \frac{e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) - e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{b})}{\dim_{\mathcal{k}} \mathfrak{b}/\mathfrak{a}} = \inf_{\mathfrak{a} : x = \mathfrak{m}} e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) - e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a} + (x)).$$

En donde se entiende que el primer ínfimo se toma sobre todos los ideales $\mathfrak{m}$*-primarios* $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$*. Asimismo, el segundo ínfimo se tomo sobre todos los ideales* $\mathfrak{m}$*-primarios* $\mathfrak{a}$ *y elementos* $x \in R$ *tal que* $\mathfrak{a} : x = \mathfrak{m}$*.*[13]

El siguiente problema abierto es sin duda el más importante en la teoría (y uno de los más importantes en álgebra conmutativa).

Problema Abierto 5. Los ínfimos en Teorema 4.25 son en realidad mínimos.

Tomemos un momento para explicar porqué el Problema Abierto 5 es tan important. Resulta que hay una teoría en álgebra conmutativa llamada *clausura hermética.* Ver [ST12, §5] por detalles. A un ideal $\mathfrak{a}$ se le asocia una clausura hermética

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^* := \{r \in R \mid \text{existe } 0 \neq c \in R \text{ tal que } cr^q \in \mathfrak{a}^{[q]} \text{ para todo } e\}.$$

Resulta que si $s(R) > 0$ entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$ para todo ideal $\mathfrak{a}$. El recípro es un problema abierto de la mayor importancia en álgebra conmutativa y más allá. Sin embargo, este se sigue de tener ínfimos en Teorema 4.25. En efecto,

Teorema 4.26 ([HH90, Theorem 8.17])**.** *Sean* $(R, \mathfrak{m}, \mathcal{k}, K)$ *un dominio local completo y* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ *ideales* $\mathfrak{m}$*-primarios. Entonces,* $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$ *sii* $e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) = e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{b})$*.*

[13]Esto es decir que se toma sobre pares de ideales $\mathfrak{m}$-primarios $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ tales que $\dim_{\mathcal{k}} \mathfrak{b}/\mathfrak{a} = 1$.

Entonces, si $s(R)=0$ y el Problema Abierto 5 tiene una solución afirmativa, entonces se tienen dos ideales $\mathfrak{m}$-primarios $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$ tal que $e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{a}) = e_{\mathrm{HK}}(\mathfrak{b})$ y entonces $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$. Lo cual implica que ya sea $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ no son herméticamente cerrados.

Problema Abierto 6. Análogamente al Problema Abierto 2 y al Problema Abierto 3, el problema sobre la racionalidad y cota superior de la F-signatura están abiertos. Sin embargo, se espera que

$$2 - s(\mathbb{F}_2[\![x,y,z,u,v]\!]/(uv + x^3 + y^3 + xyz)) = \frac{4}{3} + \frac{5}{98}\sqrt{7},$$

según [Tuc12, Proposition 4.22]. En general, nos podemos preguntar cuál es la (estructura de la) imagen de

$$\{\mathscr{k}\text{-singularidades } F\text{-regulares de dimensión } d\} \xrightarrow{s} (0,1].$$

Ver [Tuc12, Question 4.19, Question 4.20]

Problema Abierto 7 (Sobre la F-regularidad de anillos escindidores)**.** Si R es un anillo regular, resulta que R es un *escindidor*.[14] Esto quiere decir que toda extensión finita de R se escinde. El recípro es uno de los problemas abiertos más importantes en álgebra conmutativa y más allá.

4.5. Prueba de la convergencia. A continuación procedemos a demostrar a la vez que las sucesiones definiendo la multiplicidad de Hilbert–Kunz y F-signatura son convergentes. Para esto, ξ denotará ya sea μ or ν. Para el caso de la multiplicidad de Hilbert–Kunz, solo haremos el caso $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Prueba de Teorema 4.8 y Teorema 4.18. Recuerde que la sucesión $\{\xi(F^e_* R)/\nu(F^e_* R)\}_{e\in\mathbb{N}}$ es acotada; ver Ejercicio* 4.11. Por lo tanto, basta mostrar que el límite superior es menor o igual al límite inferior (los cuáles existen). Sea $\lambda(R) \coloneqq \log_p \nu(F_* R) \in \mathbb{N}$. Considere una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R^{\oplus p^{\lambda(R)}} \longrightarrow F_* R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

tal que $cT = 0$ para algún $0 \neq c \in R$ (ver Ejercicio 4.8). Esto nos da una nueva sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F^e_* R^{\oplus p^{\lambda(R)}} \longrightarrow F^{e+1}_* R \longrightarrow F^e_* T \longrightarrow 0$$

y por lo tanto

$$\xi(F^{e+1}_* R) \leq p^{\lambda(R)} \xi(F^e_* R) + \mu(F^e_* T) \leq p^{\lambda(R)} \xi(F^e_* R) + C q^{\lambda(R)-1}$$

para alguna constante C (independiente de e) al usar Ejercicio 4.12. Divida entre

$$\nu(F^{e+1}_* R) = p^{(e+1)\lambda(R)} = q^{\lambda(R)} p^{\lambda(R)} = \nu(F^e_* R) p^{\lambda(R)}$$

para obtener que

$$\frac{\xi(F^{e+1}_* R)}{\nu(F^{e+1}_* R)} \leq \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} + \frac{C'}{q}$$

donde $C' \coloneqq C/p^{\gamma(R)}$ es independiente de e. Al iterar esta desigualdad, se conluye que

$$\frac{\xi(F^{e+e'}_* R)}{\nu(F^{e+e'}_* R)} \leq \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} + \frac{C}{q}\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{e'-1}}\right) \leq \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} + \frac{2C}{q}$$

[14] En inglés, este término se conoce como *splinter*, lo que se traduce al español como astilla.

para todo $e, e' \in \mathbb{N}$. Tome el $\limsup_{e'\to\infty}$ para obtener que

$$\limsup_{e\to\infty} \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} \leq \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} + \frac{2C}{q}$$

para todo e. Tome ahora $\liminf_{e\to\infty}$ para concluir que

$$\limsup_{e\to\infty} \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)} \leq \liminf_{e\to\infty} \frac{\xi(F^e_* R)}{\nu(F^e_* R)},$$

como se quería. □

Problema Abierto 8. Un análisis más cuidadoso muestra que

$$\dim_{\Bbbk} R/I_e = s(R)q^d + O(q^{d-1}),$$

donde $d \coloneqq \dim R$. ¿Existe un número real $s'(R)$ tal que

$$\dim_{\Bbbk} R/I_e = s(R)q^d + s'(R)q^{d-1} + O(q^{d-2})?$$

Y así sucesivamente. Ver [CDS19], [Hun13, §7].

5. Umbrales de F-pureza y F-umbrales

Esta sección se basa en el trabajo de De-Stefani–Núñez-Betancourt–Pérez [DSNnBP18]. Sean $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk, K)$ un dominio local y $\mathfrak{a}$ un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Justo hemos visto como la F-signatura y la multiplicidad de Hilbert–Kunz se obtienen al considerar cierta familia de ideales $\mathfrak{m}$-primarios $\{J_e\}_{e>0}$ y estudiar el comportamiento asintótico de los cocientes

$$\frac{\dim_{\Bbbk} R/J_e}{q}.$$

Hemos usado $J_e = I_e$ para la F-signatura y $J_e = \mathfrak{a}^{[q]}$ para las multiplicidades de Hilbert–Kunz. Sin embargo, hay otra manera de medir la complejidad de los ideales J_e. Para empezar,

Ejercicio 5.1. Con la misma notación que antes, sea $J \subset R$ un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Muestre que el conjunto

$$\{a \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{m}^a \not\subset J\}$$

es no vacío y acotado. En particular, tiene un elemento máximo que denotaremos por $\alpha(J)$.

Ejercicio 5.2. Con la misma notación que antes, muestre que $\alpha(I_e) \leq \alpha(\mathfrak{m}^{[q]}) \leq \alpha(\mathfrak{a}^{[q]})$.

Ejercicio 5.3. Muestre que la sucesión $\{\alpha(\mathfrak{a}^{[q]})/q\}_e$ es acotada de la siguiente forma. Sea $\mu = \mu(\mathfrak{m})$ el número mínimo de generadores de $\mathfrak{m}$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^N \subset \mathfrak{a}$. Pruebe que

$$\mathfrak{m}^{\mu(q-1)+1} \subset \mathfrak{m}^{[q]}.$$

Use esto para mostrar que

$$\mathfrak{m}^{N(\mu(q-1)+1)} \subset \mathfrak{a}^{[q]}$$

y que $N(\mu(q-1)+1) > \alpha(\mathfrak{a}^{[q]})$. Concluya que $N\mu$ es una cota superior para la sucesión.

Teorema 5.1 ([DSNnBP18])**.** *La sucesión $\{\alpha(\mathfrak{a}^{[q]})/q\}_e$ es convergente.*

Ejercicio* 5.4. Pruebe Teorema 5.1 siguiendo los siguientes pasos. Primero muestre que si $a \geq (\mu(\mathfrak{m}) + b - 1)q$ entonces $\mathfrak{m}^a = \mathfrak{m}^{a-bq}(\mathfrak{m}^{[q]})^b$; haga una inducción sobre b. Luego, tome $b = \alpha(\mathfrak{a}^{q'}) + 1$ y $a = q(\mu + s - 1)$ y concluya que

$$\mathfrak{m}^{q\left(\mu+\alpha(\mathfrak{a}^{[q']})\right)} \subset \mathfrak{a}^{[qq']}.$$

Deduzca que $\alpha(\mathfrak{a}^{[qq']}) \leq \left(\mu + \alpha(\mathfrak{a}^{[q']})\right)$ y que

$$\frac{\alpha(\mathfrak{a}^{[qq']})}{qq'} \leq \frac{\mu}{q'} + \frac{\alpha(\mathfrak{a}^{[q']})}{q'}.$$

De aquí pruebe que el límite superior de la suma es menor igual al límite inferior. Como la sucesión es acotado, esto muestra la existencia del límite.

Definición 5.2 (F-umbral)**.** El F*-umbral* de $\mathfrak{a}$ se define como el número real no-negativo

$$c^{\mathfrak{a}} = c^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}) := \lim_{e\to\infty} \frac{\alpha(\mathfrak{a}^{[q]})}{q}.$$

El F*-umbral* de R es $c(R) := c^{\mathfrak{m}}$.

Definición 5.3 (Umbral de F-pureza)**.** Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k})$ un anillo local. Se define su *umbral de* F*-pureza* como el límite

$$\operatorname{fpt}(R) := \lim_{e\to\infty} \frac{\alpha(I_e)}{q}.$$

Ejercicio* 5.5. Pruebe que $\operatorname{fpt}(R)$ existe de la siguiente forma. Muestre que

$$c^{I_{e+1}} \leq c^{I_e^{[p]}} \leq pc^{I_e}$$

y entonces que $\{c^{I_e}/q\}_e$ es una sucesión no-creciente. Concluya que tal sucesión es convergente. Use la última desigualdad en el Ejercicio* 5.4 con $q' = 1$ y $\mathfrak{a} = I_{e''}$ para obtener que

$$\frac{\alpha(I_{e''}^{[q]})}{q} - \alpha(I_{e''}) \leq \mu.$$

Más aún, note que $\{\alpha(I_{e''}^{[q]})/q\}_{e''}$ es no-decreciente y por lo tanto:

$$0 \leq \frac{\alpha(I_{e''}^{[q]})}{q} - \alpha(I_{e''}) \leq \mu.$$

Tome el límite $e \to \infty$ y concluya que

$$0 \leq c^{I_{e''}} - \alpha(I_{e''}) \leq \mu$$

Divida por q'' y concluya.

Escolio 5.4 ([DSNnBP18])**.**

$$\operatorname{fpt}(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{c^{I_e}}{q}$$

6. Aplicación a grupos fundamentales locales

La siguiente aplicación es basada en el trabajo de Schwede, Tucker, y el autor [CRST18, CR22]. Vamos a empezar con dominio local completo $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ y que $\mathscr{k}$ es algebraicamente cerrado.[15] Sea L/K una extensión finita de cuerpos. Podemos entonces definir la *normalización* o *clausura entera* de R en L como

$$S \coloneqq R^L \coloneqq \{l \in L \mid \text{existen } r_1, \ldots, r_n \in R \text{ tales que } l^n + r_1 l^{n-1} + \cdots + r_{n-1} l + r_n = 0\}.$$

No es nada obvio, pero resulta que $S \subset L$ es un subanillo. Para más detalles sobre normalizaciones, ver [AM69, Ch.5]. Más aún, resulta que $(S, \mathfrak{n}, \mathscr{k}, L)$ es un dominio local completo (esto usa el lema de Hensel) y se tiene una extensión local $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K) \subset (S, \mathfrak{n}, \mathscr{k}, L)$.

Se dice que R es normal si la inclusión $R \subset R^K$ es una igualdad. Vamos a asumir que este es el caso. Resulta que los anillos F-regulares son siempre normales [HH89]. En tal case, $S = R^L$ es siempre normal también.

Una propiedad fundamental de estas extensiones es que sobre todo primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ yace un número finito pero no cero de ideales primos de S. Es decir, la fibra

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) \coloneqq \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S \mid \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}\}$$

es finita y no vacía. Más aún, si L/K es una extensión de Galois con grupo de Galois $G \coloneqq \operatorname{Gal}(L/K)$, entonces G actúa sobre S y su anillo de invariantes es R. Más aún, G actúa de manera transitiva sobre la fibra $f^{-1}(\mathfrak{p})$. Así si $\mathfrak{q} \in f^{-1}(\mathfrak{p})$ entonces definimos su *grupo de descomposición* como

$$D_{\mathfrak{q}} \coloneqq \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\} \subset G.$$

Note que se tiene un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{q}} &\longrightarrow \operatorname{Aut} \kappa(\mathfrak{q})/\kappa(\mathfrak{p}) \\ \sigma &\mapsto \sigma/\mathfrak{q} \end{aligned}$$

el cual es de hecho sobreyectivo. Sin embargo, lo que nos interesa es su kernel $I_{\mathfrak{q}}$, el cual se conoce como *grupo de inercia* de $\mathfrak{q}$. Se puede ver que los grupos $\{I_{\mathfrak{q}}\}_{\mathfrak{q} \in f^{-1}(\mathfrak{p})}$ son conjugados unos de otros y por lo tanto tienen el mismo órden. Tal orden común se denota por $e_{\mathfrak{p}}$ y se conoce como el *índice de ramificación* de la extensión S/R sobre $\mathfrak{p}$.

Definición 6.1. Con la misma notación que antes, decimos que la extensión S/R es *étale* sobre $\mathfrak{p}$ si $e_{\mathfrak{p}} = 1$. Asimismo, decimos que S/R es *étale sobre el locus regular* si S/R es étale sobre todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ tal que $R_{\mathfrak{p}}$ es regular.

Con todo lo anterior, podemos definir el *grupo fundamental (étale local)* de una singularidad de la siguiente forma. Primero, se fija una clausura separable K^{sep} de K.[16] Y luego se toma el límite proyectivo

$$\pi_1(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K) \coloneqq \varprojlim_{\substack{K^{\text{sep}}/L/K \\ L/K \text{ es una extensión de Galois finita} \\ R^L/R \text{ es étale sobre el locus regular}}} \operatorname{Gal}(L/K)$$

Observación 6.2. No es del todo obvio que tal límite está bien definido. Es decir, no es obvio que lo que se muestra forma un sistema dirigido.

[15] Más que ser completo, lo que importa es que sea henseliano (*i.e.* que satisfaga el lema de Hensel).

[16] Esta escogencia es completamente análoga a la de un punto base para el grupo fundamental topológico.

Note que, por definición, $\pi_1(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es un grupo profinito. De hecho, es un cociente de el grupo de Galois absoluto

$$\pi_1(K) \coloneqq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \coloneqq \varprojlim_{\substack{K^{\mathrm{sep}}/L/K \\ L/K \text{ es una extensión de Galois finita}}} \mathrm{Gal}(L/K).$$

Lema 6.3. *El grupo fundamental $\pi_1(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es finito si y sólo si*

$$\sup_{\substack{K^{\mathrm{sep}}/L/K \\ L/K \text{ es una extensión de Galois finita} \\ R^L/R \text{ es étale sobre el locus regular}}} \{[L:K] \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Es decir, si el conjunto sobre el que se toma el supremo es acotado. En tal caso, el orden de $\pi_1(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es el máximo de tal conjunto.

Teorema 6.4 ([CRST18])**.** *Con la misma notación que antes, si $(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es F-regular entonces $\pi_1(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es finito y su orden está acotado por $1/s(R)$ y no es divisible por p.*

Para probar este teorema uno necesita primero unas cuantas observaciones claves sobre la traza $\mathrm{Tr}\colon L \longrightarrow K$. La primera propiedad es que esta se restringe a una función R-lineal $\mathrm{Tr}\colon S \longrightarrow R$ (*i.e.* $\mathrm{Tr}(S) \subset R$). Más aún, resulta que $\mathrm{Tr}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{m}$ y entonces la traza también define una función $\Bbbk$-lineal

$$\bar{\mathrm{Tr}}\colon S/\mathfrak{n} = \Bbbk \longrightarrow R/\mathfrak{m} = \Bbbk$$

que en este caso es multiplicación por $e_{\mathfrak{m}} = [L:K]$. Sin embargo, corremos el riesgo de que $[L:K]$ sea cero en $\Bbbk$ y por lo tanto de que $\bar{\mathrm{Tr}}\colon \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$ sea cero también.[17] Lo cual equivale a que $\mathrm{Tr}(S) \subset \mathfrak{m}$. Esto no obstante es imposible si $(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es F-regular como veremos a continuación.

Lema 6.5. *Suponga que $(R,\mathfrak{m},\Bbbk,K)$ es F-regular. Entonces, la extensión $R \subset S$ se escinde en la categoría de R-módulos. Es decir, existe $t \in \mathrm{Hom}_R(S,R)$ tal que $t(1) = 1$.*

Demostración. Observe que el homomorfismo canónico

$$K \otimes_R \mathrm{Hom}_R(S,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(L,K)$$

es un isomorfismo. En particular, $\mathrm{Hom}_R(S,R) \neq 0$. Es decir, existe $t' \in \mathrm{Hom}_R(S,R)$ tal que $r \coloneqq t'(1) \neq 0 \in R$. Dado que R es F-regular, existe $e \gg 0$ y $\phi \in \mathrm{Hom}_R(F^e_* R, R)$ tal que $\phi(F^e_* r) = 1$. Entonces podemos tomar a t como la composición

$$S \longrightarrow F^e_* S \xrightarrow{F^e_* t'} F^e_* R \xrightarrow{\phi} R.$$

$\square$

La demostración del siguiente resultado va un poco más allá del alcance de estas notas. Sin embargo, es el análogo unidimensional del hecho de que L/K es separable sii $\mathrm{Tr}\colon L \longrightarrow K$ es no cero.

Proposición 6.6. *Si S/R es étale sobre el locus regular entonces el homomorfismo de S-módulos $S \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S,R)$ que envía $1 \in S$ a $\mathrm{Tr} \in \mathrm{Hom}_S(S,R)$ es un isomorfismo.*

[17]Por ejemplo si p divide a $[L:K]$.

Bosquejo de la prueba. Como R y S son normales, la hipótesis de ser étale sobre el locus regular implica que S/R es "cuasi-étale". Lo cual a su vez significa que el "divisor de ramificación" es trivial. Sin embargo, esto formalmente se traduce a que Tr genera libremente a $\operatorname{Hom}_S(S, R)$ como S-módulo. Más detalles se pueden consultar en [ST14]. $\square$

Entonces, a resumidas cuentas, tenemos que si $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K)$ es F-regular y $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K) \subset (S, \mathfrak{n}, \mathscr{k}, L)$ es una extensión étale sobre el locus regular, entonces $\operatorname{Tr} \in \operatorname{Hom}_R(S, R)$ satisface lo siguiente

1. la aplicación $1 \mapsto \operatorname{Tr}$ define un isomorfismo de S-módulos $S \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(S, R)$,
2. $\operatorname{Tr}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{m}$, y
3. $\operatorname{Tr}\colon S \longrightarrow R$ es sobreyectiva (*i.e.* $\operatorname{Tr}(S) \not\subset \mathfrak{m}$).

De esta manera, Teorema 6.4 se puede ver como un corolario de la siguiente fórmula.

Teorema 6.7. *Sea $(R, \mathfrak{m}, \mathscr{k}, K) \subset (S, \mathfrak{n}, \ell, L)$ una extensión finita de dominios locales tal que existe $\mathfrak{T} \in \operatorname{Hom}_R(S, R)$ tal que*

1. *la aplicación $1 \mapsto \mathfrak{T}$ define un isomorfismo de S-módulos $S \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(S, R)$,*
2. *$\mathfrak{T}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{m}$ y*
3. *$\mathfrak{T}\colon S \longrightarrow R$ es sobreyectiva (i.e. $\operatorname{Tr}(S) \not\subset \mathfrak{m}$). Entonces,*

$$[\ell : \mathscr{k}]s(S) = [L : K]s(R).$$

Observación 6.8 (Sobre restricción, extensión y co-extensión de escalares)*.* Sea $\theta\colon R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Este induce tres funtores covariantes $f_*, f^*, f^!$ que se conocen respectivamente como *restricción, extensión y co-extensión de escalares*. El funtor de restricción de escalares f_* va de la categoría de S-módulos en la de R-módulos. Si tenemos un homomorfismo de S-módulos $N \longrightarrow N'$, siempre lo podemos pensar en un homomorfismo de R-módulos por medio de $\theta\colon R \longrightarrow S$ y a esto lo denotamos como $f_*N \longrightarrow f_*N'$. Por otro lado, el funtor de extensión de escalares f^* va de la categoría de R-módulos en la de S-módulos y se define por medio del cambio de base. Es decir, si $\phi\colon M \longrightarrow M'$ es un homomorfismo de R-módulos entonces su extensión de escalares es el homomorfismo de S-módulos

$$f^*M \coloneqq S \otimes_R M \xrightarrow{S\otimes_R\phi\colon\, s\otimes m\mapsto s\otimes\phi(m)} f^*M' \coloneqq S \otimes_R M'.$$

Finalmente, el funtor $f^!$ de co-extensión de escalares va de la categoría de R-módulos en la de S-módulos y se define de la siguiente forma. Si $\phi\colon M \longrightarrow M'$ es un homomorfismo de R-módulos entonces $f^!\phi$ es el siguiente homomorfismo de S-módulos:

$$\begin{gathered} f^!M \coloneqq \operatorname{Hom}_R(S, M) \longrightarrow f^!M' \coloneqq \operatorname{Hom}_R(S, M') \\ \mu \mapsto \phi \circ \mu \end{gathered}$$

Estos tres funtores están relacionados por la siguientes adjunciones

$$f^* \dashv f_* \dashv f^!$$

En efecto, la co-unidad $\epsilon\colon f^*f_* \longrightarrow \mathrm{id}$ viene dada por

$$\epsilon_N S \otimes_R N \xrightarrow{s\otimes n\mapsto sn} N$$

mientras que su unidad $\eta\colon\ \mathrm{id} \longrightarrow f_*f^*$ es dada por

$$\eta_M\colon M \xrightarrow{m\mapsto 1\otimes m} S \otimes_R M.$$

Similarmente, la co-unidad $\mathrm{Tr}\colon f_*f^! \longrightarrow \mathrm{id}$ de la adjunción $f_* \dashv f^!$ se conoce como *la traza* y se define como

$$\mathrm{Tr}_M\colon \mathrm{Hom}_R(S,M) \xrightarrow{\mu\mapsto\mu(1)} M$$

mientras que su unidad $\nu\colon \mathrm{id} \longrightarrow f^!f_*$ es la transformación natural definida por

$$\begin{aligned}\nu_N\colon N &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S,N)\\ n &\mapsto (s\mapsto sn).\end{aligned}$$

Ejercicio 6.1. Pruebe que en efecto los anteriores pares de unidades y co-unidades definen adjunciones $f^* \dashv f_* \dashv f^!$. Es decir, muestre que se tienen dos diagramas conmutativos de transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} f^* \arrow[r, "f^*\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & f^*f_*f^* \arrow[d, "\epsilon f^*"] \\ & f^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_* \arrow[r, "\eta f_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & f_*f^*f_* \arrow[d, "f_*\epsilon"] \\ & f_* \end{tikzcd}$$

que definen la adjunción $f^* \dashv f_*$. Similarmente, para la adjunción $f_* \dashv f^!$, muestre que se tienen diagramas conmutativos de transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} f_* \arrow[r, "f_*\nu"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & f_*f^!f_* \arrow[d, "\mathrm{Tr}\, f_*"] \\ & f_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^! \arrow[r, "\nu f^!"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & f^!f_*f^! \arrow[d, "f^!\,\mathrm{Tr}"] \\ & f^! \end{tikzcd} .$$

Lo anterior significa que las aplicaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_S(f^*M,N) \xrightarrow{\psi\mapsto f_*\psi\circ\eta_M} \mathrm{Hom}_R(M,f_*N) \text{ y } \mathrm{Hom}_R(M,f_*N) \xrightarrow{\phi\mapsto\epsilon_N\circ f^*\phi} \mathrm{Hom}_S(f^*M,N)$$

son mutuamente inversas. De igual manera, las aplicaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_S(N,f^!M) \xrightarrow{\psi\mapsto \mathrm{Tr}_M\circ f_*\psi} \mathrm{Hom}_R(f_*N,M) \text{ y } \mathrm{Hom}_R(f_*N,M) \xrightarrow{\phi\mapsto f^!\phi\circ\nu_N} \mathrm{Hom}_S(N,f^!M)$$

son mutuamente inversas.

Ejercicio 6.2. En el marco de la Observación 6.8, pruebe que si hay un isomorphism $S \mapsto f^!R = \mathrm{Hom}_R(S,R)$, $1 \mapsto \mathfrak{T}$, entonces se tiene un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_S(N,S) \xrightarrow{\psi\mapsto\mathfrak{T}\circ\psi} \mathrm{Hom}_R(N,R)$$

de R-módulos y de S-módulos.

Proposición 6.9 ([Tuc12, Theorem 4.11]). *Sean $(R,\mathfrak{m},\mathscr{k},K)$ un dominio local y M un R-módulo finitamente generado y libre de torsión. Entonces*

$$\lim_{e\to\infty}\frac{\eta(F^e_*M)}{\nu(F^e_*R)} = \nu(M)s(R).$$

Ejercicio 6.3. Pruebe Proposición 6.9. *Sugerencia:* Use Ejercicio 4.7, Ejercicio 4.8, y Ejercicio 4.12 para reducir al caso en que M es libre.

Prueba de Teorema 6.7. Primer, aplicamos el Ejercicio 6.2 en el caso $N = F^e_* S$ para establecer un isomorfismo

$$f_* \operatorname{Hom}_S(F^e_* S, S) \xrightarrow{\psi \mapsto \mathfrak{T} \circ \psi} \operatorname{Hom}_R(F^e_* S, R)$$

de R-módulos. Por la segunda hipótesis, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f_* \operatorname{Hom}_S(F^e_* S, S) \arrow[r, "\psi \mapsto \mathfrak{T} \circ \psi"] & \operatorname{Hom}_R(F^e_* S, R) \\
f_* \operatorname{Hom}_S(F^e_* S, \mathfrak{n}) \arrow[r, "\psi \mapsto \mathfrak{T} \circ \psi"] \arrow[u, "\subset"] & \operatorname{Hom}_R(F^e_* S, \mathfrak{m}) \arrow[u, "\subset"']
\end{tikzcd}$$

La tercera hipótesis implica que la flecha de abajo es también un isomorfismo. En particular,

$$\dim_{\ell} \frac{\operatorname{Hom}_S(F^e_* S, S)}{\operatorname{Hom}_S(F^e_* S, \mathfrak{n})} = [\ell : k] \dim_{k} \frac{f_* \operatorname{Hom}_S(F^e_* S, S)}{f_* \operatorname{Hom}_S(F^e_* S, \mathfrak{n})} = [\ell : k] \dim_{k} \frac{\operatorname{Hom}_S(F^e_* S, R)}{\operatorname{Hom}_S(F^e_* S, \mathfrak{m})}$$

Dado que S es un R-módulo finitamente generado y libre de torsión, el resto se sigue de Proposición 6.9. □

Referencias

[AL03] I. M. Aberbach and G. J. Leuschke: *The F-signature and strong F-regularity*, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 1, 51–56. MR1960123 (2004b:13003)

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald: *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. MR0242802 (39 #4129)

[BFS13] A. Benito, E. Faber, and K. E. Smith: *Measuring singularities with Frobenius: the basics*, Commutative algebra, Springer, New York, 2013, pp. 57–97. 3051371

[BE04] M. Blickle and F. Enescu: *On rings with small Hilbert-Kunz multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 9, 2505–2509 (electronic). MR2054773 (2005b:13029)

[CDS19] A. Caminata and A. De Stefani: *F-signature function of quotient singularities*, J. Algebra **523** (2019), 311–341. 3901707

[CRST18] J. Carvajal-Rojas, K. Schwede, and K. Tucker: *Fundamental groups of F-regular singularities via F-signature*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **51** (2018), no. 4, 993–1016. 3861567

[CR22] J. A. Carvajal-Rojas: *Finite torsors over strongly F-regular singularities*, Épijournal Géom. Algébrique **6** (2022), Art. 1, 30. 4391081

[DSNnBP18] A. De Stefani, L. Núñez Betancourt, and F. Pérez: *On the existence of F-thresholds and related limits*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 9, 6629–6650. 3814343

[Gab04] O. Gabber: *Notes on some t-structures*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 711–734.

[GM10] I. M. Gessel and P. Monsky: *The limit as $p \to \infty$ of the Hilbert–Kunz multiplicity of $\sum x_i^{d_i}$*, arXiv e-prints (2010), arXiv:1007.2004.

[HM93] C. Han and P. Monsky: *Some surprising Hilbert-Kunz functions*, Math. Z. **214** (1993), no. 1, 119–135. MR1234602 (94f:13008)

[Har77] R. Hartshorne: *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR0463157 (57 #3116)

[Hoc13] M. Hochster: *F-purity, Frobenius splitting, and tight closure*, Commutative algebra, Springer, New York, 2013, pp. 471–484. 3051382

[HH89] M. Hochster and C. Huneke: *Tight closure and strong F-regularity*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) (1989), no. 38, 119–133, Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987). MR1044348 (91i:13025)

[HH90] M. Hochster and C. Huneke: *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 1, 31–116. MR1017784 (91g:13010)

[HH94] M. Hochster and C. Huneke: *Tight closure of parameter ideals and splitting in module-finite extensions*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 4, 599–670. 1297848 (95k:13002)

[HJPS22] M. Hochster, J. Jeffries, V. Pandey, and A. K. Singh: *When are the natural embeddings of classical invariant rings pure?*, arXiv e-prints (2022), arXiv:2210.09351.

[HR74] M. Hochster and J. L. Roberts: *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, Advances in Math. **13** (1974), 115–175. MR0347810 (50 #311)

[Hun13] C. Huneke: *Hilbert-Kunz multiplicity and the F-signature*, Commutative algebra, Springer, New York, 2013, pp. 485–525. 3051383

[HL02] C. Huneke and G. J. Leuschke: *Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules*, Math. Ann. **324** (2002), no. 2, 391–404. MR1933863 (2003j:13011)

[JNS+23] J. Jeffries, Y. Nakajima, I. Smirnov, K.-i. Watanabe, and K.-I. Yoshida: *Lower bounds on Hilbert-Kunz multiplicities and maximal F-signatures*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **174** (2023), no. 2, 247–271. 4545206

[Kun69] E. Kunz: *Characterizations of regular local rings for characteristic p*, Amer. J. Math. **91** (1969), 772–784. MR0252389 (40 #5609)

[Kun76] E. Kunz: *On Noetherian rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 4, 999–1013. MR0432625 (55 #5612)

[MP] L. Ma and T. Polstra: *F-singularities: a commutative algebra approach*, `https://www.math.purdue.edu/~ma326/F-singularitiesBook.pdf`.

[Mat89] H. Matsumura: *Commutative ring theory*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid. MR1011461 (90i:13001)

[Mon08] P. Monsky: *Rationality of Hilbert-Kunz multiplicities: a likely counterexample*, Michigan Math. J. **57** (2008), 605–613, Special volume in honor of Melvin Hochster. 2492471 (2010g:13026)

[PT18] T. Polstra and K. Tucker: *F-signature and Hilbert–Kunz multiplicity: a combined approach and comparison*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 1, 61–97. 3781433

[ST12] K. Schwede and K. Tucker: *A survey of test ideals*, Progress in Commutative Algebra 2. Closures, Finiteness and Factorization (C. Francisco, L. C. Klinger, S. M. Sather-Wagstaff, and J. C. Vassilev, eds.), Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2012, pp. 39–99.

[ST14] K. Schwede and K. Tucker: *On the behavior of test ideals under finite morphisms*, J. Algebraic Geom. **23** (2014), no. 3, 399–443. 3205587

[Sin05] A. K. Singh: *The F-signature of an affine semigroup ring*, J. Pure Appl. Algebra **196** (2005), no. 2-3, 313–321. MR2110527 (2005m:13010)

[SZ15] K. E. Smith and W. Zhang: *Frobenius splitting in commutative algebra*, Commutative algebra and noncommutative algebraic geometry. Vol. I, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 67, Cambridge Univ. Press, New York, 2015, pp. 291–345. 3525475

[Sta20] T. Stacks Project Authors: *Stacks Project*, 2020.

[TW18] S. Takagi and K.-I. Watanabe: *F-singularities: applications of characteristic p methods to singularity theory [translation of MR3135334]*, Sugaku Expositions **31** (2018), no. 1, 1–42. 3784697

[Tuc12] K. Tucker: *F-signature exists*, Invent. Math. **190** (2012), no. 3, 743–765. 2995185

[VK12] M. R. Von Korff: *The F-Signature of Toric Varieties*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012, Thesis (Ph.D.)–University of Michigan. 3093997

[WY00] K.-i. Watanabe and K.-i. Yoshida: *Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength*, J. Algebra **230** (2000), no. 1, 295–317. MR1774769 (2001h:13032)

[WY05] K.-i. Watanabe and K.-i. Yoshida: *Hilbert-Kunz multiplicity of three-dimensional local rings*, Nagoya Math. J. **177** (2005), 47–75. 2124547 (2005m:13026)

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., Callejón Jalisco s/n, 36024 Col. Valenciana, Guanajuato, Gto, México

Email address: `javier.carvajal@cimat.mx`